ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΕΝΙΑΙΟΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Γ΄ ΜΑΘΗΤΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Ταχ. Δ/νση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 151 80 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: http: // www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Α. Βάρλα - Κ. Πισλή
Τηλέφωνο: 210 344 3272 – 210 344 2242

Να διατηρηθεί μέχρι ....
Βαθμός Ασφαλείας ....

Μαρούσι, 11/09/2012
Αριθ. Πρωτ.: 104510/Γ2
Βαθ. Προτερ. ΕΞ. ΕΠΕΙΓΟΝ

Προς:
1. Διευθύνσεις Δ.Ε. της χώρας. Έδρες τους.
2. Δημόσια και Ιδιωτικά Σχολεία Δ.Ε. της χώρας. (μέσω Διευθύνσεων Δ.Ε)

Κοιν:
1. Περιφερειακές Διευθύνσεις Π.Ε. & Δ.Ε. της χώρας. Έδρες τους.
2. Γραφεία Σχολικών Συμβούλων
3. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία Πανεπιστήμιο (Ελ. Βενιζέλου) 34, 106 79 Αθήνα

ΘΕΜΑ: 73ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός (Π.Μ.Δ.) στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»
Σχετικό έγγραφο: 100994/Γ2/04-09-2012

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε. Μ. Ε.) διοργανώνει τον 73ο Πανελλήνιο Μαθητικό Διαγωνισμό (Π. Μ. Δ.), **«Ο ΘΑΛΗΣ»**, στα Μαθηματικά, το **Σάββατο 20 Οκτωβρίου 2012 και ώρα 9.00 π.μ.**

Ο διαγωνισμός απευθύνεται στους μαθητές **των Β΄ και Γ΄ τάξεων των Γυμνασίων, όλων των τάξεων των Γενικών Λυκείων και των Επαγγελματικών Λυκείων.** Οι δηλώσεις συμμετοχής των ενδιαφερομένων θα υποβληθούν στο σχολείο που φοιτούν**, μέχρι και τη 12η Οκτωβρίου 2012,** και θα διαβιβασθούν άμεσα στις Διευθύνσεις όπου ανήκουν.

Οι Διευθύνσεις Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης θα συγκροτήσουν τις τοπικές νομαρχιακές επιτροπές σε συνεργασία με τα τοπικά παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. (όπου αυτά υπάρχουν) για τη διεξαγωγή του διαγωνισμού και θα ορίσουν τα εξεταστικά κέντρα και τους επιτηρητές.

Ο διαγωνισμός θα διαρκέσει τρεις (3) ώρες, θα απαρτίζεται μόνο από θέματα πλήρους ανάπτυξης και γι' αυτό θα απαιτηθούν κόλλες αναφοράς.

Τα γραπτά των μαθητών θα αποσταλούν για βαθμολόγηση στην Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. στην Αθήνα ή στα κατά τόπους Παραρτήματά της (όπου αυτά υπάρχουν). Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα αποσταλούν στις τοπικές νομαρχιακές επιτροπές για βράβευση των μαθητών που θα διακριθούν.

Οι μαθητές, που θα διακριθούν στο διαγωνισμό **«Ο ΘΑΛΗΣ»**, θα κληθούν να συμμετάσχουν στον επόμενο διαγωνισμό **«Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»**, που θα διεξαχθεί **στις 12 Ιανουαρίου 2013.** Στη συνέχεια, οι διακριθέντες στον **«ΕΥΚΛΕΙΔΗ»** θα λάβουν μέρος στο διαγωνισμό **«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** στις 2**3 Φεβρουαρίου 2013,** προκειμένου να επιλεγεί **η Εθνική ομάδα** που θα λάβει μέρος στην 30^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αλβανία, Μάιος 2013), στη 17^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Τουρκία, Ιούνιος 2013) και στην 54^{η} Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Κολομβία, Ιούλιος 2013).

Η συμμετοχή των μαθητών στο διαγωνισμό είναι **προαιρετική και η συμμετοχή των εκπαιδευτικών εθελοντική.**

Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να απευθύνονται στην **Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.) Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34, 106 79 Αθήνα**, **στα τηλέφωνα: 210-36.16.532, 210-36.17.784, στο fax: 210-36.41.025, και στην ιστοσελίδα: www.hms.gr**

Παρακαλούμε να ενημερώσετε τα σχολεία της αρμοδιότητάς σας. Σημειώνεται ότι η μετακίνηση και η συμμετοχή των σχολικών μονάδων στον εν λόγω διαγωνισμό θα γίνει χωρίς δαπάνη για το Δημόσιο.

Εσωτερική Διανομή:

1. Γραφείο κ. Ειδικού Γραμματέα
2. Δ/νση Διεθνών Εκπαιδευτικών Σχέσεων
3. Δ/νση Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
4. Δ/νση Εκκλησιαστικής Εκπαίδευσης
5. Δ/νση Ειδικής Αγωγής
6. Δ/νση ΠΟΔΕ
7. Δ/νση ΣΕΠΕΔ
8. Δ/νση Σπουδών Δ.Ε.
   Τμήματα Β΄ και Γ΄

Ο ΕΙΔΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΕΑΣ

ΣΩΤΗΡΗΣ ΓΚΛΑΒΑΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 9 Δεκεμβρίου 2006

Αγαπητοί μαθητές,

Σας καλωσορίζουμε στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ) "**ΘΑΛΗΣ**". Σήμερα δεν δίνετε τις συνηθισμένες εξετάσεις. Συμμετέχετε σε έναν αγώνα του πνεύματος. Και μόνο η απόφασή σας για συμμετοχή είναι μια επιτυχία. Με την ευκαιρία αυτής μας της επικοινωνίας θα θέλαμε να σας πληροφορήσουμε για τα εξής :

Στα περιοδικά της ΕΜΕ **Ευκλείδης Α΄** και **Ευκλείδης Β΄** δημοσιεύονται εκτός των άλλων θεμάτων ανά τάξη και θέματα με τις λύσεις τους από Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Επίσης έχουν εκδοθεί βιβλία της ΕΜΕ με τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, Βαλκανιάδων, Θεωρίας αριθμών και είναι υπό έκδοση βιβλίο με τα θέματα των Ελληνικών Διαγωνισμών.

Στον κόμβο της ΕΜΕ στο διαδίκτυο στη διεύθυνση www.hms.gr, υπάρχουν θέματα με τις λύσεις τους από παλαιότερους Εθνικούς και Διεθνείς διαγωνισμούς. Ακόμα σύντομα θα τοποθετηθούν και σημειώσεις σχετικές με απαραίτητες γνώσεις μαθηματικών θεωρίας και ασκήσεων επιπέδου διεθνών Διαγωνισμών

Για τις εορτές των Χριστουγέννων και το νέο έτος το Δ.Σ. της ΕΜΕ σας εύχεται ολόψυχα χρόνια πολλά, προσωπική και οικογενειακή ευτυχία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ.
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Γυμνασίου

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

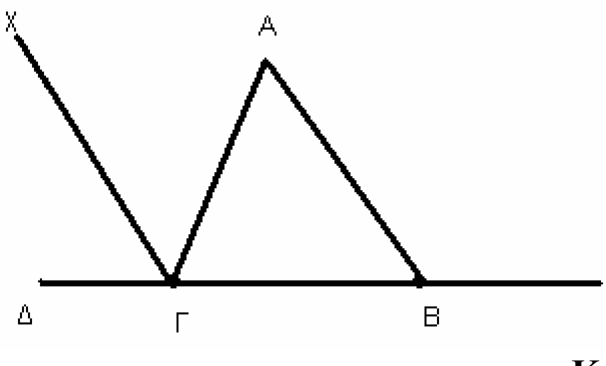
$$\mathrm{A} = \left\{111 - \left[264 - (15 + \frac{54}{6}) \cdot |-5|\right] : 12\right\} : 11 + 1$$

2. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

3. Το 6% του αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος.

$$\kappa = \frac{9\alpha - 3\beta}{6\alpha - \beta}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

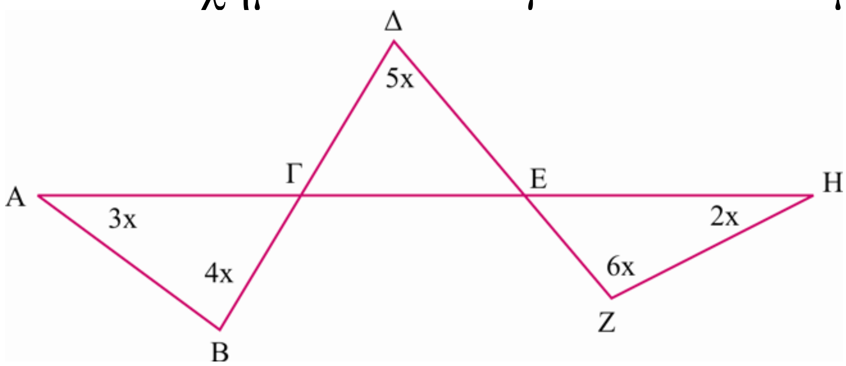
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και αβγ=10, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 (\alpha + \frac{\gamma}{2})^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός 27p + 1 είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} a\beta^{-1} + \frac{10}{3} a^{-1}\beta = 3.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x+3)=\lambda^3+2\lambda x-2$

για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}>\hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ−ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $\kappa = 2+2^2+2^3+\ldots+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$
   β) Να λύσετε την εξίσωση:
$$2^{-1}x+x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y)) = x - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) + f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1} - x\cdot 3^x - 4x - 1 = 0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 $\kappa\alpha\iota$ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta} \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{M}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα **ΚΒ· ΚΓ**, **ΛΒ· ΛΓ** και **ΜΒ· ΜΓ** είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$\mathrm{A} = (111 - 144 : 12) : 11 + 1 = (111 - 12) : 11 + 1 = 99 : 11 + 1 = 9 + 1 = 10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι

$$10 \cdot 2 + 8 \cdot 10 = 100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha = \frac{4}{100}\beta \ \ \textit{οπότε}\ \ \alpha = \frac{2}{3}\beta$$

. Έτσι έχουμε

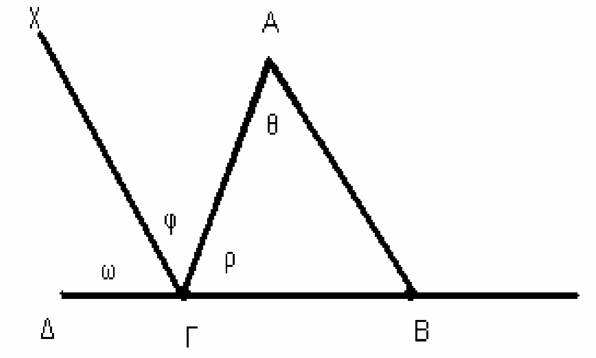
$$\kappa = \frac{9 \cdot \frac{2}{3}\beta - 3\beta}{6 \cdot \frac{2}{3}\beta - \beta} = \frac{6\beta - 3\beta}{4\beta - \beta} = \frac{3\beta}{3\beta} = 1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega = \phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi = \theta$ και αφού

ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$\omega + \phi + \rho = 180^0$, οπότε $\omega = \phi = \rho = 60^0$

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^0$.



Λύσεις Γ΄ Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}B = 180^0 - 3x - 4x = 180^0 - 7x$$

$$\Delta\hat{E}\Gamma = H\hat{E}Z = 180^0 - 2x - 6x = 180^0 - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο ΓΔΕ:

$\Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Delta} = 180^0$ οπότε

$180^0 - 7x + 180^0 - 8x + 5x = 180^0 \Leftrightarrow 10x = 180^0 \Leftrightarrow x = 18^0$.

2. $A = \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot (-\frac{\gamma}{2})^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

$= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100.$

3. Έστω $A=27p+1$. Για p=2 έχουμε $A=27 \cdot 2+1=55=5 \cdot 11$, ενώ για p≠2 ο 27p είναι περιττός οπότε ο Α είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9 \text{, οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9 \text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1, \quad \textit{που δεν ισχύει.}$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$

$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$

$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$

$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon\geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\left(\lambda-2\right)=0\Leftrightarrow\lambda=0\ \acute{\eta}\ \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)}\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

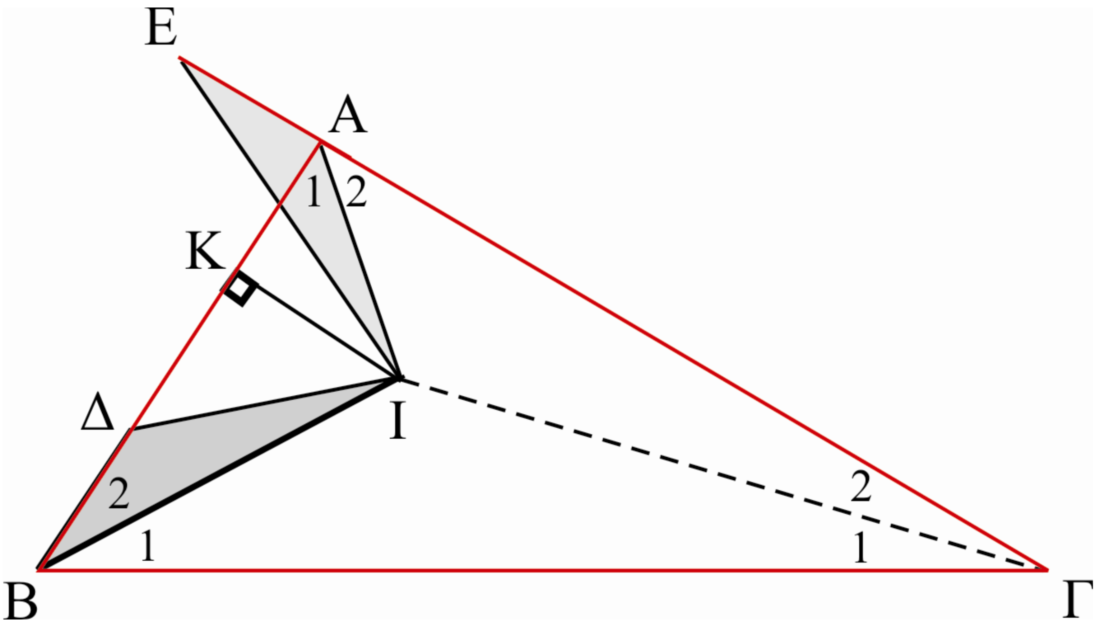
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha}\geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha},$$ αρκεί

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\geq 0$$, αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\text{ΙΓΕ}}=\overset{\Delta}{\text{ΙΓΒ}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{E}=\hat{B}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\Delta}{\text{ΙΑΕ}}=\overset{\Delta}{\text{ΙΒΔ}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{E}=\hat{B}_1=\hat{B}_2$, άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.

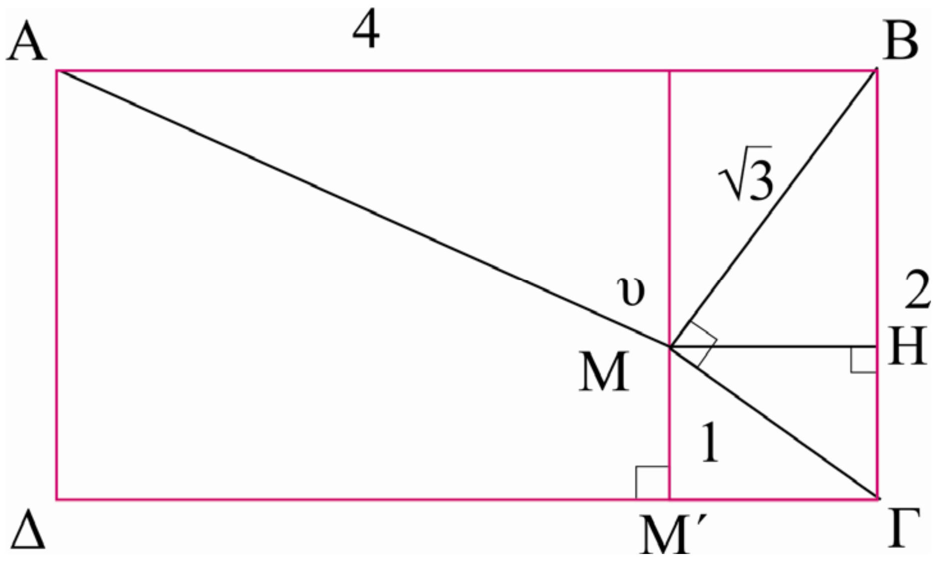
<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1) \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2).$$

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$\text{ΜΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \; \acute{\varepsilon}\chi o \upsilon \mu \varepsilon \; \widehat{\text{ΜΒΓ}} = 30^0,$$

οπότε $\widehat{\text{ΜΓΒ}} = 60^0 \; \kappa\alpha\iota \; \widehat{\text{ΜΓΔ}} = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \frac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$..

β΄ τρόπος

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \frac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4)=$$

$$=30(1+2^4+2^8+...+2^{2004}) = \pi o\lambda.30$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \acute{\eta} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \acute{\eta} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \; \textit{οπότε} \; \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

<u>β΄ τρόπος</u>

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$
$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y) \; \textit{για κάθε} \; y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0) \; \textit{για κάθε} \; x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \; \textit{και} \; f(f(x)) = x - f(0), \; \textit{για κάθε} \; x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$-f(x) = x - f(0)$ ή

$f(x) = f(0) - x \quad (1)$ και $f(-x) = f(0) + x \quad (2), \; \textit{για κάθε} \; x \in \mathbb{R}$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \; \textit{για κάθε} \; x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε

$$3^{\rho+1}-\rho\cdot 3^{\rho}-4\rho-1=0\Rightarrow 3^{\rho}(3-\rho)=4\rho+1$$

$$\Rightarrow 3^{\rho}=\frac{4\rho+1}{3-\rho}\ (\text{αφού προφανώς } \rho\neq 3)\Rightarrow \frac{4\rho+1}{3-\rho}>0$$

$$\Rightarrow (4\rho+1)(\rho-3)<0\Rightarrow -\frac{1}{4}<\rho<3\Rightarrow \rho\in\{0,1,2\}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί ρ=0 και ρ=1 δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός ρ=2 όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση ρ=2.

3. Επειδή

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_1=|z_1+z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\dfrac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\dfrac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq |z_1+z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}=(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2+\left(\frac{|z_2|}{\eta\mu\theta}\right)^2\right)\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^2\geq|z_1+z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ έχουμε ότι τα Κ, Λ, Μ βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ. Έστω

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi.$$

Αν ΚΒ· ΚΓ= ΛΒ· ΛΓ= ΜΒ· ΜΓ, τότε

$$\frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Lambda\mathrm{B}\cdot\Lambda\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma\,\eta\mu\phi$$

$$\Rightarrow (\mathrm{KB}\Gamma)=(\Lambda\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{MB}\Gamma).$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Κ, Λ, Μ θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ΒΓ, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Γυμνασίου

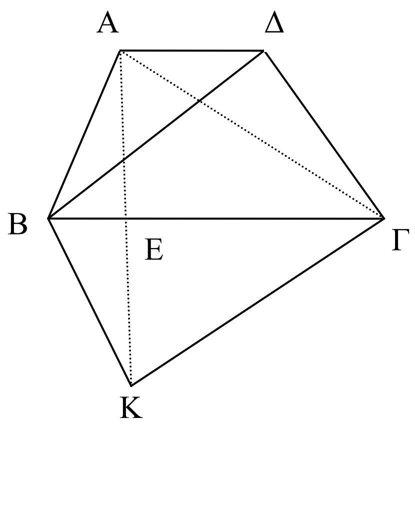
Πρόβλημα 1.
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=\left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^{2}.$$

Πρόβλημα 2.
Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Πρόβλημα 3.
Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Πρόβλημα 4.
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

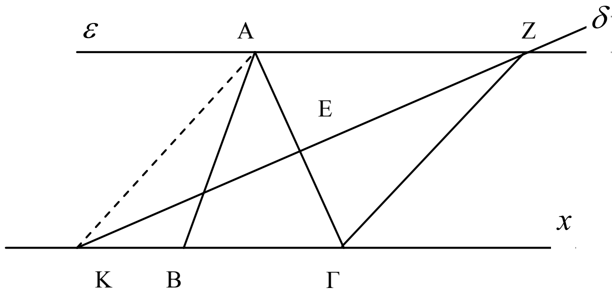
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad \mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.

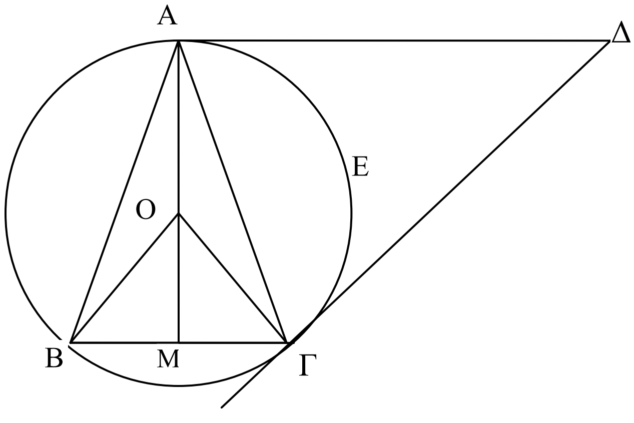
Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\mathrm{A} = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.
Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*
Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*
Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*
Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*
Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$:

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,
(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x,y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+2x^3y^2+3x^3+y^4+3y^2-40=0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία $Ax // ΒΓ$ (η Ax βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

Πρόβλημα 4.

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x^2y + 2yz^2 &= 70xz \\ 7y^2z + 4zx^2 &= 256xy \\ 5z^2x + 6xy^2 &= 52yz. \end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x) - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
$68^{ου}$ ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A} = (200:8+12\cdot 100)+\left[200:(8+2)+762\right]\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2$

$= (25+1200)+(200:10+762)\cdot\left[(-1)+1+(-1)\right]^2$

$= 1225+(20+762)\cdot(-1)^2$

$= 1225+782\cdot 1 = 2007.$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\{120,240,360,480,...\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360$.
Αν x, y, z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360.$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$

$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360 \Leftrightarrow 12\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.
Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\frac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x=\mathrm{Β\Gamma}$, $y=\mathrm{Α\Delta}$ και $\mathrm{ΑΕ}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{(x+y)\upsilon}{2}=\mathrm{E}=(\mathrm{ΑΒ\Gamma\Delta})\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\mathrm{E}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\mathrm{E}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{ΑΒ\Delta})=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2.$$

(β) $(\mathrm{ΑΒΚ\Gamma})=2(\mathrm{ΑΒ\Gamma})=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2(y\cdot\upsilon)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$\left(\mathrm{ΑΒΚΓ}\right)=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{ΒΓ}\cdot \mathrm{ΑΚ}=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2\upsilon =2\left(y\cdot \upsilon\right)=2\cdot 200=400cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4$$
$$= -\left[2^8 : \left(2^2\right)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -\left(2^8 : 2^4 + 4^2\right) : 2^4$$
$$= -\left(2^4 + 4^2\right) : 2^4 = -32 : 16 = -2.$$
$$\mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right]$$
$$= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y)$$
$$= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15.$$
$$\mathrm{A} > \mathrm{B} \Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x = 40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9 . \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

Από την παραγοντοποίηση των παραπάνω αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων προκύπτει ότι κανένας από αυτούς δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος αριθμός.

4. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}=2\cdot 75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAE\Gamma}\right)=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ-\mathrm{O\hat{\Gamma}A}=90^\circ-\mathrm{O\hat{A}\Gamma}=\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{A\Delta}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B\Gamma}$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O\Gamma}^2-\mathrm{M\Gamma}^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\left.\begin{cases} xy=(x-50)(y+40) \\ xy=(x+100)(y-20) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 40x-50y=2000 \\ -20x+100y=2000 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=100 \\ y=20 \end{cases}\right\}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

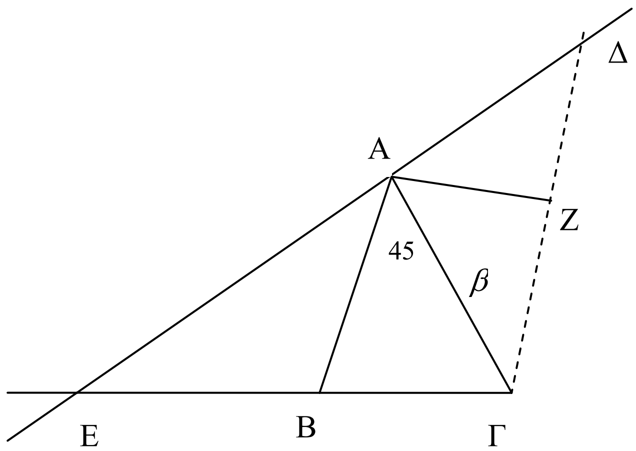
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = *β*, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x+\beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right)\cdot\left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1\cdot 41 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1), (2), (3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$\Leftrightarrow\left(x=1 \text{ και } y=1\right)$ ή $\left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0\Leftrightarrow\lambda^2-4\kappa\mu=0\Leftrightarrow\lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu\Leftrightarrow\kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa=1 \text{ και } \mu=1.$$

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu\Leftrightarrow\kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$(\kappa=1$ και $\mu=4)$ ή $(\kappa=4$ και $\mu=1)$ ή $(\kappa=2$ και $\mu=2)$.

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu\Leftrightarrow\kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$(\kappa=1$ και $\mu=9)$ ή $(\kappa=9$ και $\mu=1)$ ή $(\kappa=3$ και $\mu=3)$.

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu\Leftrightarrow\kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$(\kappa=2$ και $\mu=8)$ ή $(\kappa=8$ και $\mu=2)$ ή $(\kappa=4$ και $\mu=4)$.

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$(1,2,1)$, $(1,4,4)$, $(2,4,2)$, $(1,6,9)$, $(3,6,3)$, $(2,8,8)$, $(4,8,4)$.

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

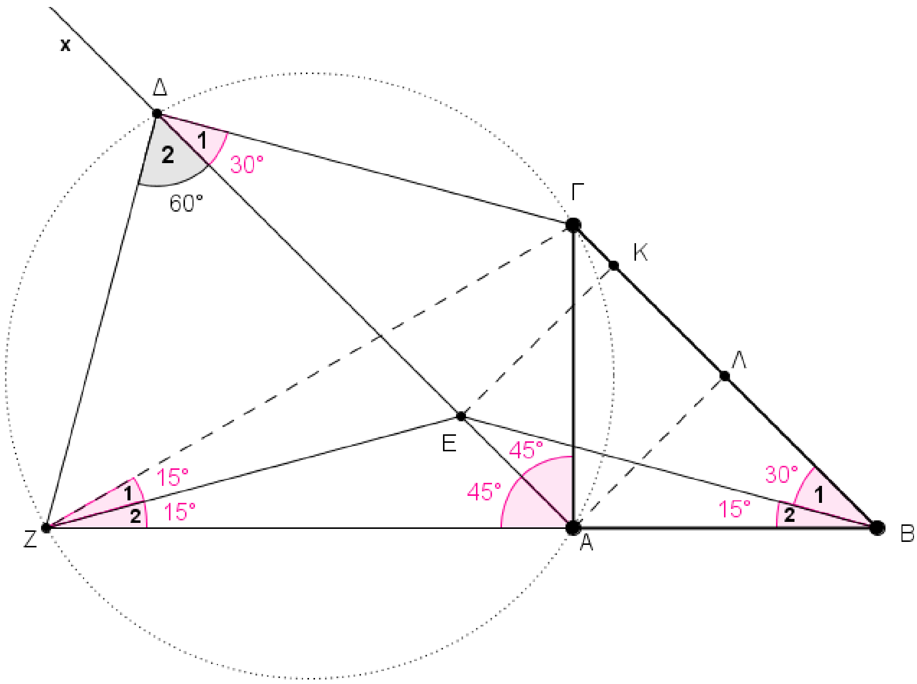
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ΒΓ}=\text{ΓΔ}=\text{ΔΕ}=\text{ΒΕ} \qquad (1)$$



Θεωρούμε ΑΛ και ΕΚ κάθετες στη ΒΓ.
Τότε $ΑΛ = ΕΚ$ (διότι ΑΛΚΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η ΑΛ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΚ, έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{Β}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο ΒΓΔΕ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = 30^o$ και επειδή $Γ\hat{Δ}Ζ = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{Δ}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$) και η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Άρα το Δ είναι μέσο του τόξου ΓΖ, οπότε

$$\boxed{ΔΓ = ΔΖ \overset{(1)}{=} ΔΕ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ΖΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Ζ}Α$.
Εφόσον το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $ΕΖ = ΕΒ$ και επειδή $\hat{Β}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Ζ}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70,\ \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256,\ \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u,\ \frac{yz}{x} = v,\ \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left\{\begin{array}{ll} 3u + 2v = 70 & (1) \\ 7v + 4w = 256 & (2) \\ 5w + 6u = 52 & (3) \end{array}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow .$$

$$u + v + w = 42\ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u = 2,\ v = 32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w = 8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2,\ \frac{yz}{x} = 32,\ \frac{zx}{y} = 8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32\ . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} 32x^2 = 2\cdot 8\cdot 32 \\ 8y^2 = 2\cdot 8\cdot 32 \\ 2z^2 = 2\cdot 8\cdot 32 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{array}\right\},$$

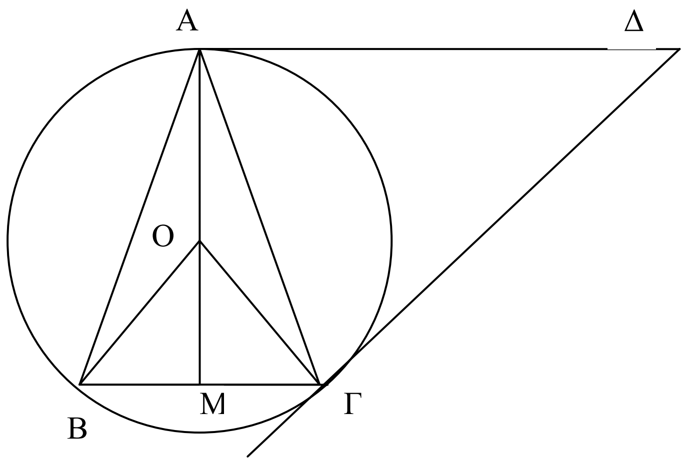
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x,y,z) = (4,8,16) \text{ ή } (-4,-8,-16) \text{ ή } (4,8,-16) \text{ ή } (-4,-8,16)$$

$$\text{ή } (4,-8,-16) \text{ ή } (-4,8,16) \text{ ή } (4,-8,16) \text{ ή } (-4,8,-16).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή ΄(ΔΑ = ΔΓ, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = B\Gamma = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $AM = \alpha\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Άρα είναι

$$\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{\alpha + \alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\cdot\frac{\alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(9+5\sqrt{3}\right)}{4}$$

2. **(α)** Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\left\{\begin{array}{c} 8\lambda - 2(\mu+4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4\cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{array}\right\}.$$

(β) Για λ=2 και μ=3 η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3-7x-2=(x-2)(2x^2+4x+1)$$
$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x+2}=\frac{17}{8},\quad x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}.$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-19x-26=0,\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{13}{16},\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{16}.$$

3. Για $x=y=0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-0$$
$$\Leftrightarrow f(0)=f\left(f(0)\right) \qquad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f\Big(f(x)-f\left(f(x)\right)\Big)=f\left(f(x)\right)-f(x) \qquad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f\Big(f(0)-f\left(f(0)\right)\Big)=f\left(f(0)\right)-f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x=0$, έχουμε:

$f\left(f(0)-f(y)\right)=f\left(f(0)\right)-y$ και δεδομένου ότι $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$f\left(-f(y)\right)=-y. \qquad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$f\left(f(x)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow f(0)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow$$
$$f\left(f(x)\right)=x \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f\Big(-f\left(f(x)\right)\Big)=-f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x)=-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x=\dfrac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \frac{b+c}{b-c}$, $z = \frac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \tag{2}$$

$$\text{και } \frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}\ . \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$0 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Μονάδες 5

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Ay είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$. Δίνεται ακόμη ότι:

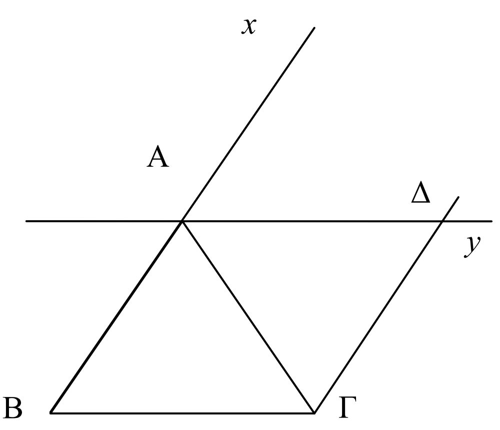
$B\hat{A}\Gamma = 62^\circ$ και $AB = A\Delta$.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 2

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

Μονάδες 3



3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4},$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Μονάδες 5

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$69^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \dfrac{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $\quad B = \dfrac{\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]^2}{5} + \dfrac{x}{2}$.

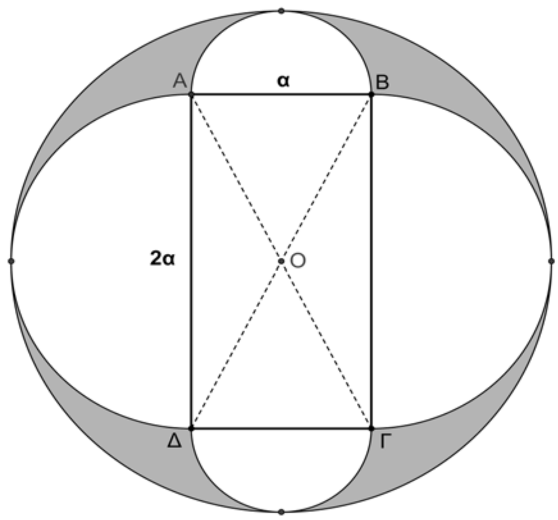
Αν είναι $A = B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Το σημείο $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και
(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = 2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. ***Μονάδες 5***



4. Αν ισχύει $\dfrac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4 \cdot (-1)^{\nu+2}.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και
$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

Μονάδες 5

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

Μονάδες 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες
$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$
να αποδείξετε ότι:
(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.
(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Μονάδες 5

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90^{\circ}$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2,$$
$$x + y + z = 300.$$

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έτσι ώστε

$$ΑΓ \perp ΑΜ \text{ και } ΑΓ = ΑΜ, \quad ΒΔ \perp ΜΒ \text{ και } ΒΔ = ΜΒ,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AM} \ , \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$

$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

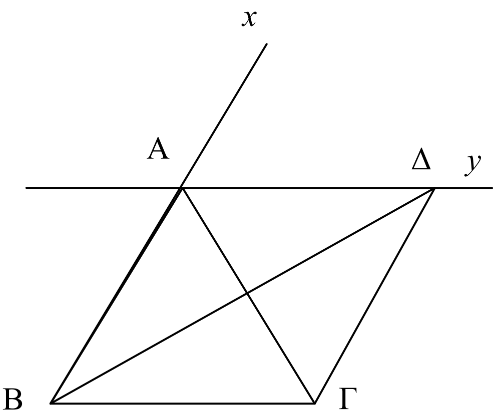
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\mathrm{A}y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η $\mathrm{A}y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$ θα είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $\mathrm{A}y \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{\mathrm{B}} = \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $\mathrm{A}y$ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$A = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$A = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 = 2008.$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left.\begin{cases} A_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ A_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} A_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ A_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{cases}\right\},$$

οπότε ο αριθμός $A_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $A_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < A < 200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100 < \frac{60}{100}\cdot A < \frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60 < A_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $A_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$A = 108 \cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$K = 216 \cdot \frac{100}{80} = 270.$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-(-1)^{2009}=1-(-1)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-(-1)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{(4+1)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορ- θογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}(1,3)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAB\Gamma})=1\cdot 3=3$$

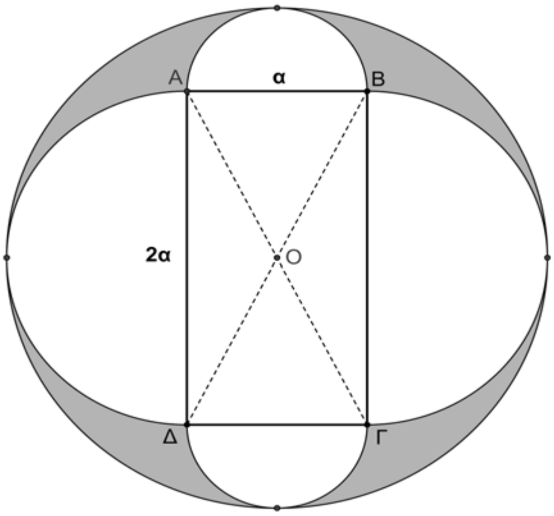
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α .

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\text{Ε} = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = (\pi - 2)\alpha^2 .$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{Α} = 2003\cdot(-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4\cdot(-1)^{\nu+2} .$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu . 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900 \Leftrightarrow \frac{45^\nu \cdot 4^\nu}{6^\nu} \Leftrightarrow \left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu = 900 \Leftrightarrow 30^\nu = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2 .$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu = (2\cdot 3\cdot 5)^\nu \Leftrightarrow 30^\nu = 30^2 \Leftrightarrow 30^{\nu-2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu - 2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu - 2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\text{Α} = 2003\cdot(-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} = 2003\cdot 1 - (-1) + 4\cdot 1 = 2003 + 1 + 4 = 2008..$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$0 \le x \le y \le z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

Λύση
Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} & xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44 \\ \Leftrightarrow\ & xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45 \\ \Leftrightarrow\ & xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+x+y+1)(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \le y \le z$, έπεται ότι:

$$1 \le x+1 \le y+1 \le z+1. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,2,14) \text{ ή } (0,4,8) \text{ ή } (2,2,4) \text{ ή } (0,0,44).$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

Λύση
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$).
1η περίπτωση.
Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

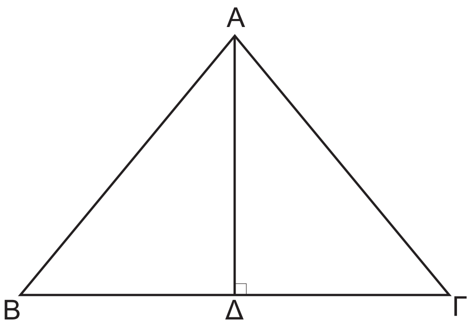
- Αν είναι $B\hat{A}\Delta=\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}A$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{A}_1=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{x}$ και $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$

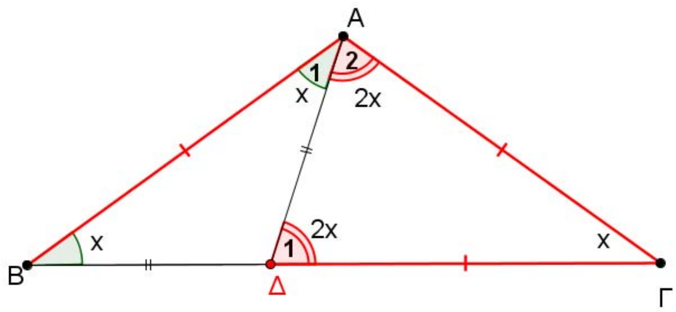
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{A}=108^o$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \hat{\Gamma}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}A}$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^{0}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}$ έπεται ότι: $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow 180^{\circ} - \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^{\circ}$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ ώστε τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$$

$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

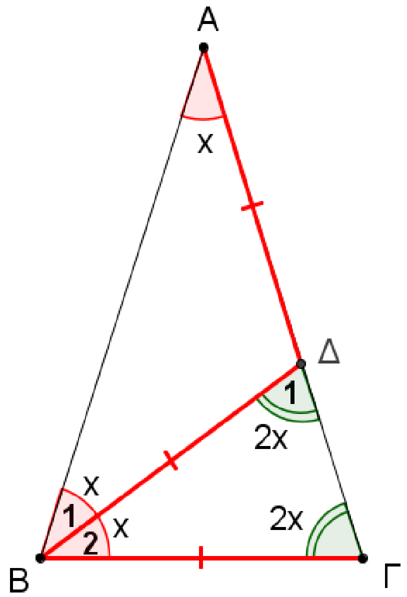
$$\hat{x} + \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^{0}$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{x} = 36^{o}.$$

Στη περίπτωση αυτή είναι

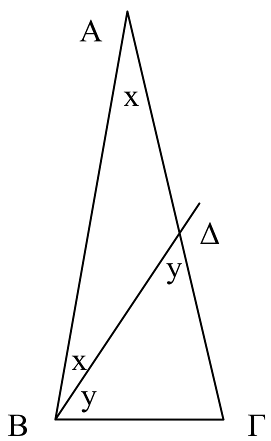
$$\hat{A} = 36^{o} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^{o}.$$



Σχήμα 4

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}} = x$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = y$, τότε θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{7}, \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$



Σχήμα 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x,\ y$ και z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους $x,\ y,\ z$ ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -(x + y)$ και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-(x + y)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x + y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται

$$x^2 - y = (x + y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των y, z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x + 15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.

Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot15=$$

$$=25\cdot4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

Παρατήρηση

Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\overline{\alpha\beta}$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\overline{\alpha\beta\gamma}$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Λύση (1ος τρόπος)

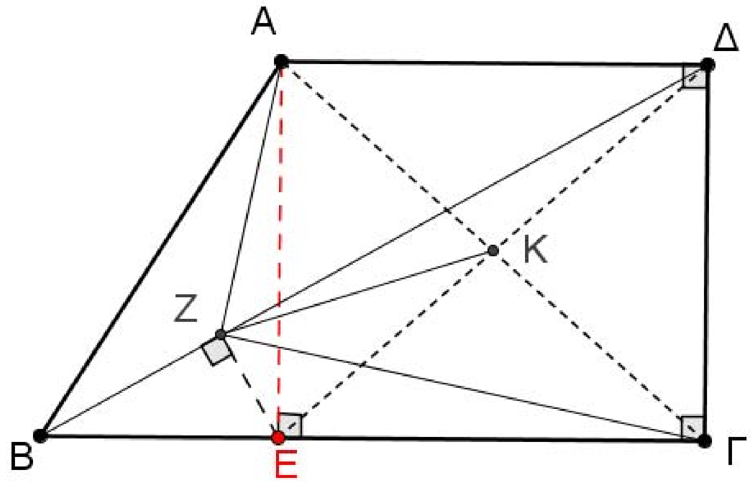
Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$ΑΓ=ΕΔ. \qquad (1)$$

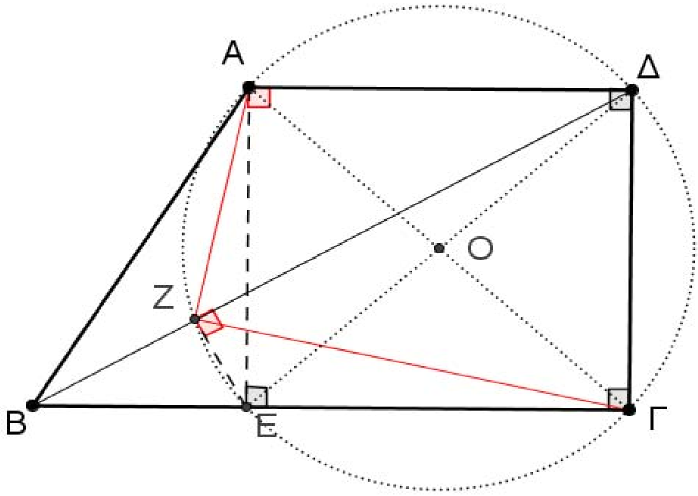
Επειδή είναι $ΕΖ\perp ΒΔ$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ΖΚ=\frac{ΕΔ}{2}. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $ΖΚ=\frac{ΑΓ}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου ΑΖΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι $Α\hat{Ζ}Γ=90^\circ$.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

2^{ος} Τρόπος

Το τετράπλευρο $ΑΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Εφόσον $Ε\hat{Ζ}Δ = Ε\hat{Α}Δ = 90^o$, το τετράπλευρο $ΕΖΑΔ$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία $Α, Δ, Γ, Ε, Ζ$ είναι ομοκυκλικά. Άρα $Α\hat{Ζ}Γ = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο $ΑΓ$).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2 \Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2x)-(x^2z-y^2z)+(z^2x-z^2y)=2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=2 \Leftrightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι

$$x-y \geq 0 \text{ και } x-z \geq y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y)+(y-z)=x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1, y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x, y, z) = (k+1, k, k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x + y + z = 300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1) + k + (k-1) = 300 \Leftrightarrow 3k = 300 \Leftrightarrow k = 100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x, y, z) = (101, 100, 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ} = \text{ΑΜ}, \; \text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ} = \text{ΜΒ},$$

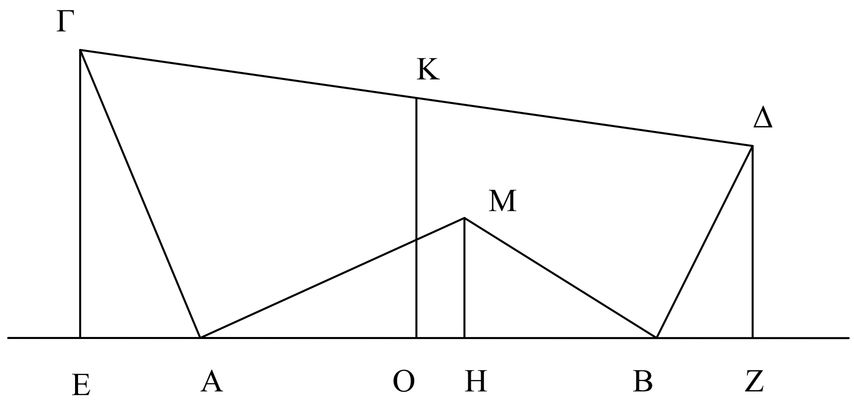
και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Η}$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Η}$ και $\text{Β}\hat{\Delta}\text{Ζ}$. Έτσι από την υπόθεση ΑΓ = ΑΜ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma\text{Ε} = \text{ΑΗ} \tag{1}$$

$$\text{ΕΑ} = \text{ΜΗ}. \tag{2}$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση ΒΔ = ΜΒ και ΒΔ ⊥ ΜΒ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta\text{Ζ} = \text{ΗΒ} \tag{3}$$

$$\text{ΒΖ} = \text{ΜΗ}. \tag{4}$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\text{ΟΚ} = \frac{\Gamma\text{Ε} + \Delta\text{Ζ}}{2}. \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\text{ΟΚ} = \frac{\Gamma\text{Ε} + \Delta\text{Ζ}}{2} = \frac{\text{ΑΗ} + \text{ΗΒ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}. \tag{6}$$

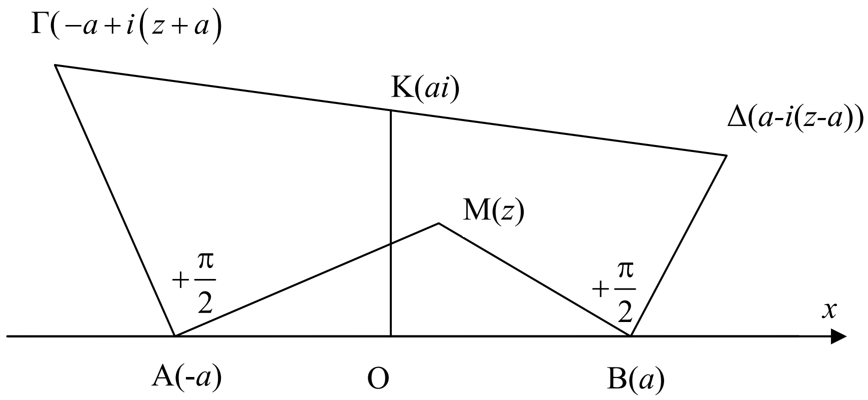
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού a, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a+i(z+a)$.



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a - i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a+i(z+a)+a-i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού z, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta.$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών $\alpha,\ \beta$ και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών $\alpha,\ \beta$. Τότε από τις σχέσεις $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta|(4\alpha+5\beta)=\mathrm{A} \text{ και } \delta|(3\alpha+4\beta)=\mathrm{B},$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta|\mathrm{A}=4\alpha+5\beta$ και $\delta|\mathrm{B}=3\alpha+4\beta$ έπεται ότι $\delta|\mathrm{A}-\mathrm{B}=\alpha+\beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta|5(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{A}=\alpha \quad \text{και} \quad \delta|\mathrm{A}-4(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\beta,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A}=n^2-n+1$ και $\mathrm{B}=n^2+n+1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A}=n(n-1)+1$ και $\mathrm{B}=n(n+1)+1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n-1)$ και $n(n+1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B}-\mathrm{A}=2n>0$, οπότε $\mathrm{A}<\mathrm{B}$. Έστω $\mathrm{A}+1, \mathrm{A}+3, \ldots, \mathrm{A}+(2\kappa-1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A}+(2\kappa-1)=\mathrm{B}-1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B}-\mathrm{A}=2\kappa \Leftrightarrow 2n=2\kappa \Leftrightarrow \kappa=n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A}+1, \mathrm{A}+3, \ldots, \mathrm{A}+(2n-1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma=n\mathrm{A}+[1+3+\ldots+(2n-1)]=n^3-n^2+n+\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}=n^3+n.$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x,y,z) με $x\geq y\geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned}xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)&=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2\\&=xy(x-y)+(x-y)z^2-(x^2-y^2)z\\&=(x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right]\\&=(x-y)[x(y-z)-z(y-z)]\\&=(x-y)(y-z)(x-z).\end{aligned}$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \quad (1)$$

$$\text{ή } x-y=2, y-z=1, x-z=3 \quad (2)$$

$$\text{ή } x-y=1, y-z=1, x-z=6 \quad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

  $$x-y=1, \ y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, \ z=y-2,$$

  όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$ΑΓ \perp ΑΜ \text{ και } ΑΓ = 2 \cdot ΑΜ \ , \ \ ΒΔ \perp ΜΒ \text{ και } ΒΔ = 2 \cdot ΜΒ$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $Μ\hat{Α}Η$ και $Α\hat{Γ}Ε$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $Μ\hat{Β}Η$ και $Β\hat{Δ}Ζ$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{ΓΕ}{ΑΗ} = \frac{ΑΕ}{ΜΗ} = \frac{ΑΓ}{ΑΜ} = 2,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

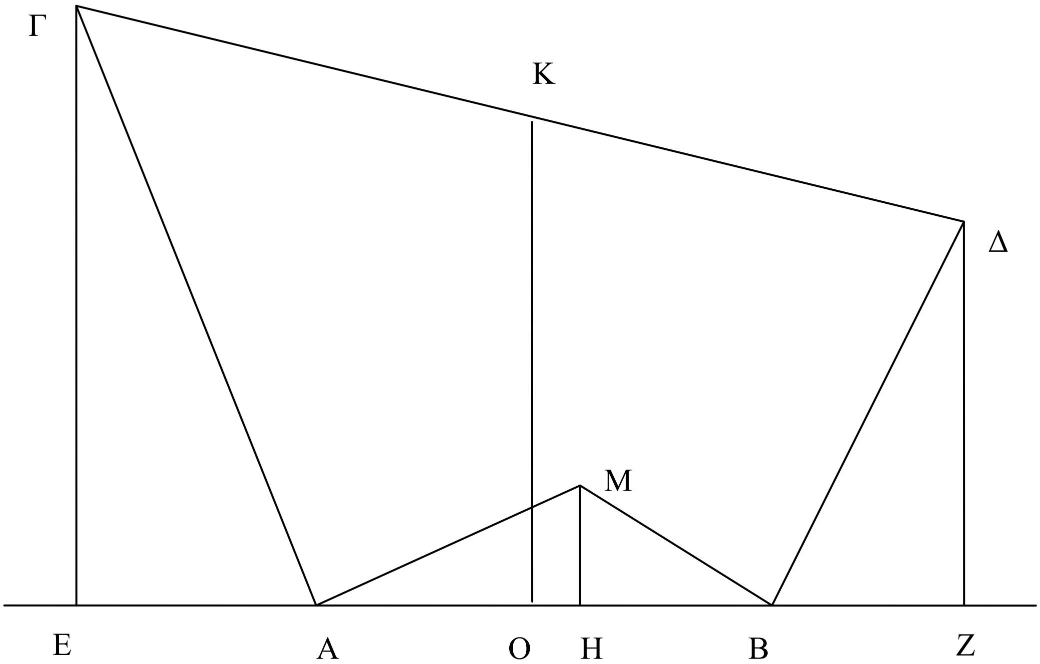
$$ΓΕ = 2 \cdot ΑΗ \tag{1}$$

$$ΕΑ = 2 \cdot ΜΗ . \tag{2}$$

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$ΔΖ = 2 \cdot ΗΒ \tag{3}$$

$$ΒΖ = 2 \cdot ΜΗ . \tag{4}$$



Σχήμα 10

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$ΟΚ = \frac{ΓΕ + ΔΖ}{2} . \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{2 \cdot \mathrm{AH} + 2 \cdot \mathrm{HB}}{2} = \frac{2 \cdot \mathrm{AB}}{2} = \mathrm{AB}\,. \qquad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον O της EZ είναι και μέσον της AB, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι EA = BZ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}\,. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο K βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB σε απόσταση από το μέσον O ίση προς το AB. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M.

Παρατήρηση
Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α ;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4\cdot(-1)^{\nu} + 2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων $\mathrm{O}xy$, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2, και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο .

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\leq\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A_1,B_1,\Gamma_1}$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma,A\Gamma,AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A_2,B_2,\Gamma_2}$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA,OB,O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1}$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{B_1B_2}$ και $\mathrm{\Gamma_1\Gamma_2}$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y με $x\geq 2009$ και $y\geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\}\qquad(\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο} .
Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x\left(x-2\right)+11x-10y=2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(y-f\left(x\right)\right)=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right),$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x))=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}
Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.
Να αποδείξετε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33”.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο} .
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(Α_1,\frac{R}{2})$, $C_2(Β_1,\frac{R}{2})$ και $C_3(Γ_1,\frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $Α_2, Β_2, Γ_2$ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$ και ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.
Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

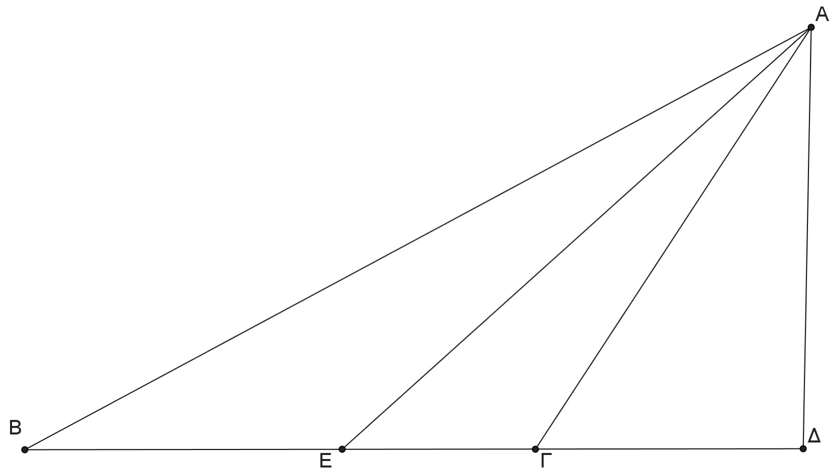
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4^o

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot(-1)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot(-1)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1,$ όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5 \cdot (2\kappa + 1) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

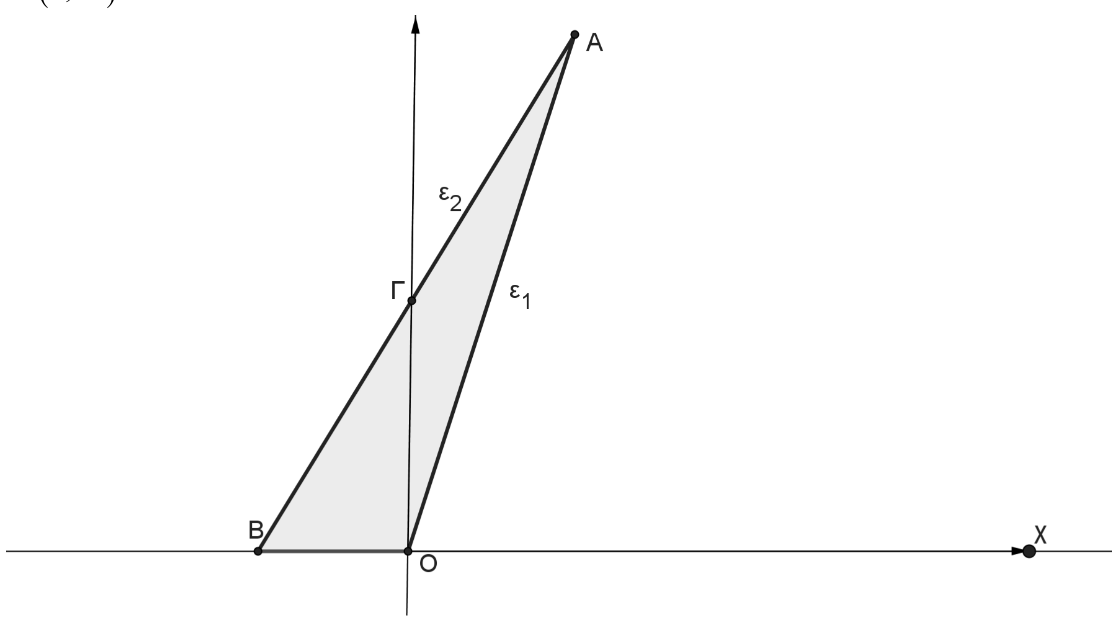
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4 , ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η). Όμως διέρχεται από το σημείο Β(0,6), οπότε θα ισχύει $6 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $\mathrm{A}(3,12)$.



Σχήμα 2

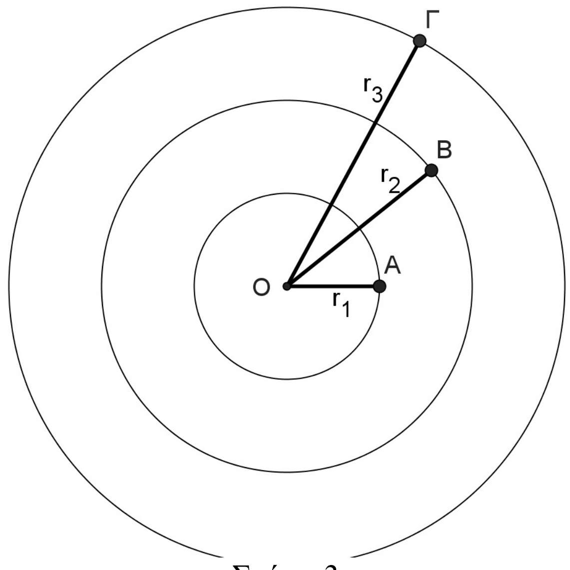
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\mathrm{B}(-3,0)$, οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$\text{E(OAB)} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)}{\left(r_3 - r_2\right)\left(r_3 + r_2\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \qquad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε, λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\pi\left[\left(2r_1\right)^2 - r_1^2\right]}{\pi\left[\left(3r_1\right)^2 - \left(2r_1\right)^2\right]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2} + \left(2^2\right)^{\nu+2} - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2 + \left(2^{\nu+2}\right)^2 - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2} - 2^{\nu+2}\right)^2 \leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu} = 2^{\nu+4} + 2^{\nu} = 2^{\nu}\cdot\left(2^4 + 1\right) = 17\cdot 2^{\nu} = 34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

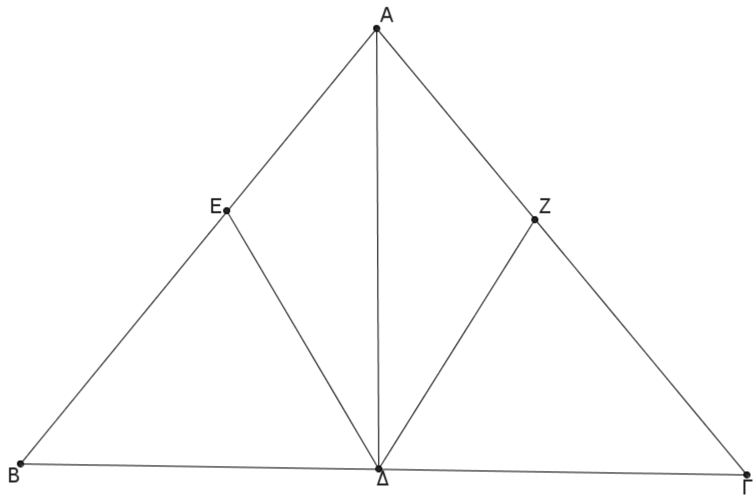
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

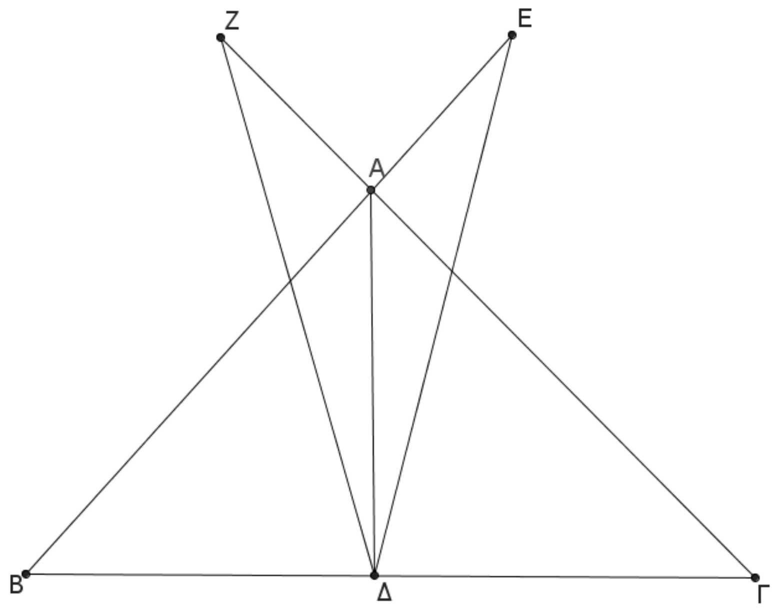
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z.$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).
Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x=3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο (

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0 \leq \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

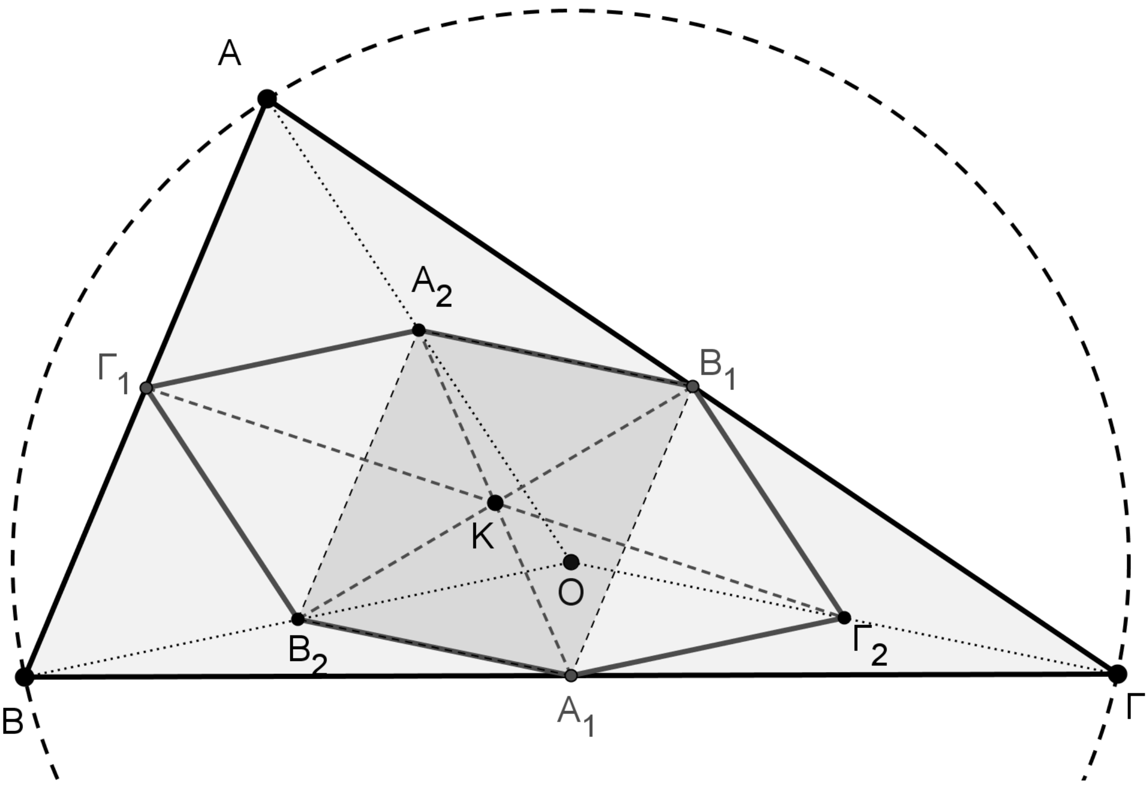
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2^o .

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $Α_1, Β_1, Γ_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα και $Α_2, Β_2, Γ_2$ είναι τα μέσα των $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $Α_2Β_1Γ_2Α_1Β_2Γ_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$ και $Γ_1Γ_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_2Β_1$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΑΓ$, άρα:

$$Α_2Β_1 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Β_2$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΒΓ$, άρα:

$$Α_1Β_2 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $Α_1Β_1Α_2Β_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο K.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο Κ .

ΘΕΜΑ 3ο .

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $\mathrm{A}=2010$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y \\ (y+z)^3=x-2y-z \\ (z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3+2\alpha=\beta \\ \beta^3+2\beta=\gamma \\ \gamma^3+2\gamma=\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha(\alpha^2+2)=\beta \\ \beta(\beta^2+2)=\gamma \\ \gamma(\gamma^2+2)=\alpha\end{array}\right.$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο
Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015.$$

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1) - 2y = 403 . \qquad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1)-2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2ο
Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x - f(y)\right) - f\left(y - f(x)\right) = 2f\left(f(x) - f(y)\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξτε ότι $f(x - f(x)) = 0$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση
Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f(x - f(x)) - f(x - f(x)) = 2f(f(x) - f(x)),$$

οπότε θα είναι $f(0) = 0$.
Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(0 - f(y)) - f(y - f(0)) = 2f(f(0) - f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0) = 0$, καταλήγουμε:

$$f(-f(y)) - f(y) = 2f(-f(y)) \Leftrightarrow f(-f(y)) = -f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f(-f(x)) = -f(x). \qquad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f(x - f(0)) - f(0 - f(x)) = 2f(f(x) - f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0) = 0$, καταλήγουμε:

$$f(x) - f(-f(x)) = 2f(f(x)). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* έχουμε: $f(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^o.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overline{\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\mathbf{000\cdots000}}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{00}\cdots\mathbf{00}\,\boldsymbol{\alpha}}$, μεσολαβούν $\boldsymbol{2\nu}$ το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$ ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$".

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$ διαιρείται με το 11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha} &= \alpha\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + \cdots + 0\cdot 10^{2\nu} + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1+10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1+10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \cdots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha\cdot\kappa.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$. Θα αποδείξουμε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3". **(1)**

Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.

Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+1$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3m$

2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+2$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k+1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k+2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.

Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ της μορφής $\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.

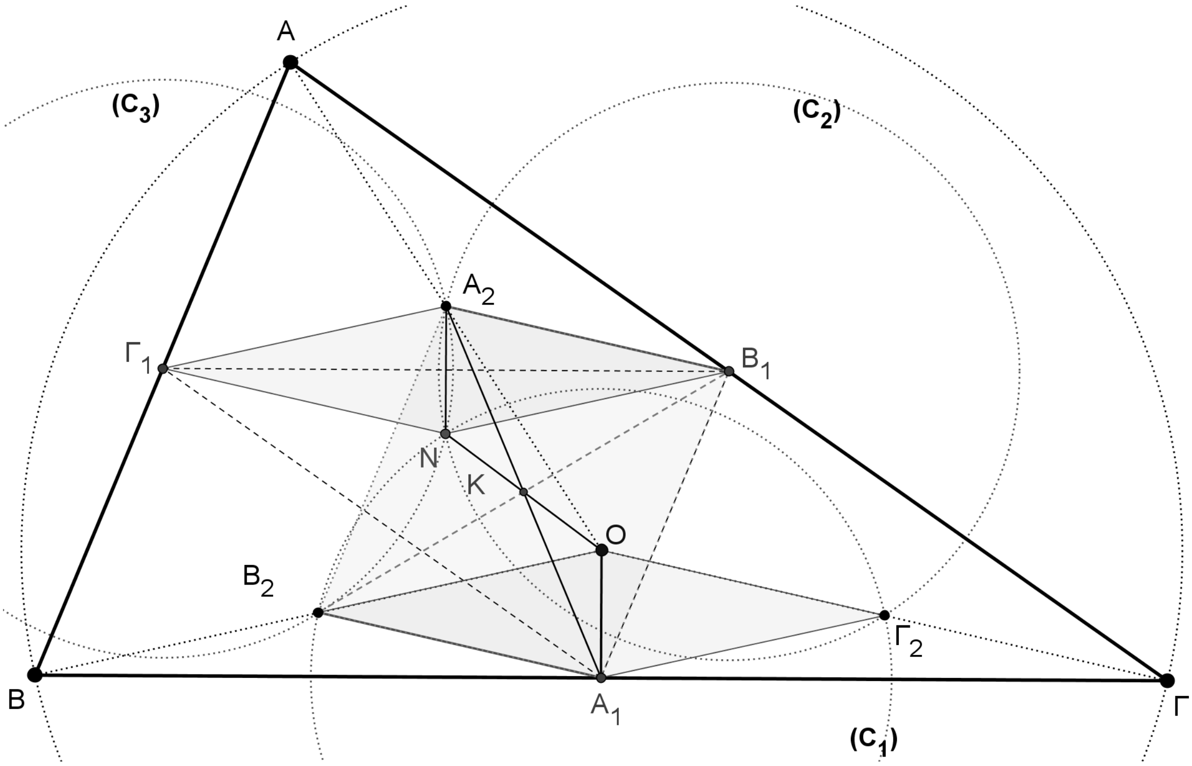
Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4^o.

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$)

Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων OA_1B, $OA_1\Gamma$, OB_1A, $OB_1\Gamma$, $O\Gamma_1A$ και $O\Gamma_1B$.)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ είναι τα σημεία A_2, B_2, Γ_2.

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1NB_1A_2$ και $OB_2A_1\Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2B_1 = // B_2A_1$, $\Gamma_1A_2 = // A_1\Gamma_2, \ldots$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο A_2OA_1N είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η A_1A_2 περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του A_1A_2.

Το τετράπλευρο $\Gamma_1A_2\Gamma_2A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1\Gamma_2$ περνά από το μέσο K του A_1A_2 που είναι μέσο και του $\Gamma_1\Gamma_2$.

Τέλος το τετράπλευρο $B_1\Gamma_1B_2\Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η B_1B_2 και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1\Gamma_2$ που είναι μέσο και του B_1B_2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Γυμνασίου

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=7x+10y-3w-87\,.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:
(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

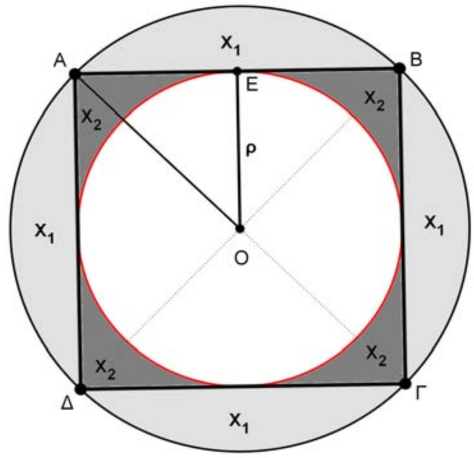
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες $\mathrm{A}x$ και $\mathrm{A}y$ κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=120^0$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ .Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(\mathrm{O},\rho)$ και $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(\mathrm{O},x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14, \quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A}=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4 .$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y} \quad , \quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ, Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και οι κύκλοι $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = \mathrm{AB}$) και $c_2(\mathrm{A}, \mathrm{A\Gamma})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = \mathrm{A\Gamma}$). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A}, \mathrm{A\Gamma})$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο N.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $\Gamma\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{B}$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\mathrm{EKN}$ είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ $(\hat{\mathrm{A}} = 90^o)$ και έστω E το μέσο της διχοτόμου $\mathrm{B}\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$. Το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{B\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E. Αν η ευθεία $\mathrm{E\Delta}$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{B\Lambda}$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- **α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- **β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$ και $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B, αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$, $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ και ισχύει ότι $\mathrm{r}_1<\mathrm{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MA}<\mathrm{MB}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16,\ 32,\ 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $Ι\hat{Δ}Γ = 70^0$ και $Ι\hat{Ε}Γ = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $Β\hat{Ι}Δ$ και $Ε\hat{Ι}Γ$.

Λύση

α. Εφόσον $ΙΔ//ΑΒ$ θα ισχύει: $\hat{Β} = \hat{Δ}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΔ, ΑΒ$ τεμνομένων από την $ΒΔ$).

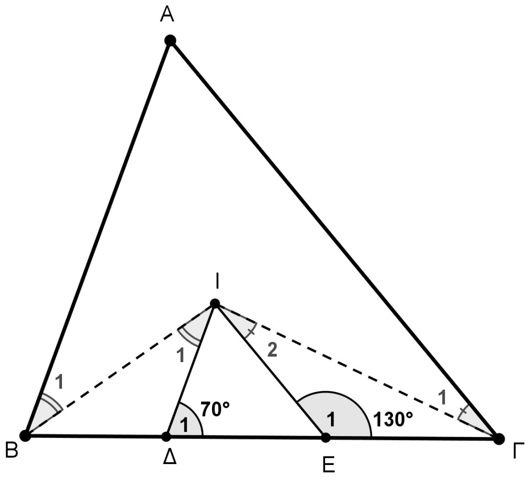
Επειδή είναι $ΙΕ//ΑΓ$, θα ισχύει: $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{Γ}, \hat{Ε}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΕ, ΑΓ$ τεμνομένων από την $ΕΓ$).

Οι γωνίες $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^o - \hat{Β} - \hat{Γ} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $ΙΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $ΙΔ//ΑΒ$, θα ισχύει: $\hat{Ι}_1 = \hat{Β}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{Ι}_1, \hat{Β}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΔ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΙΒ$.



Σχήμα 1

Εφόσον $ΙΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισχύει: $\hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $ΙΕ//ΑΓ$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Ι}_2 = \hat{Γ}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{Ι}_2, \hat{Γ}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΕ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΙΓ$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$

$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

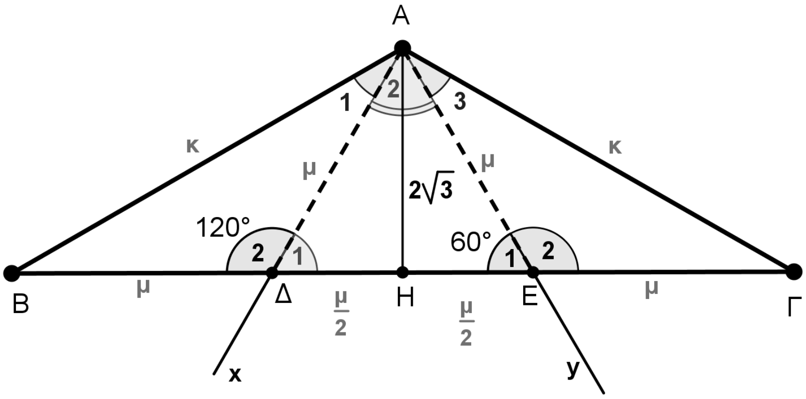
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500, 4524, 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Αx και Αy κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^o$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^o$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^o$. Άρα το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες $\mathrm{A\Delta}$ (Ax) και AE (Ay) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^\circ = 120^0 - 90^\circ = 30^o$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ και $\mathrm{A\Gamma E}$ έχουν: $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^o$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^o$. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$, $\mathrm{A\Gamma E}$ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ που έχουν $\mathrm{A\hat{E}B} = 60^\circ = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^0$, δηλαδή $\mathrm{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AH\Delta}$ έχουμε:

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

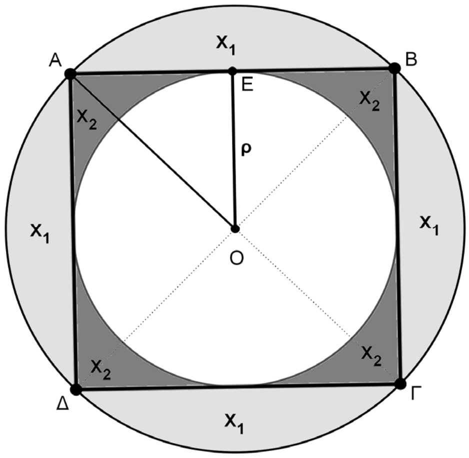
Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E(\Delta(O,\rho,OA)) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ , αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ , δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi \cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho < x < \rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - x^2\right] = \pi\left(x^2 - \rho^2\right) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\qquad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2-5x=14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5)=14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2-5x-14=0,\ \text{με}\ \alpha=1,\ \beta=-5,\gamma=-14,$$

οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=7$ ή $x=-2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}\Leftrightarrow 2x-2+x^2-1<x^2-x\Leftrightarrow 3x<3\Leftrightarrow x<1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x=-2$.

2. Αν οι α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
A&=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4\\
&=\left(\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta^3\gamma^2+\beta^4\gamma^2\right)-\left(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^4\right)\\
&=\alpha^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=\left[\alpha^2-(\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\\
&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\quad,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y}=w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ x=13+4w \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 4w=11 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=\left(24, \dfrac{4}{11}\right)$

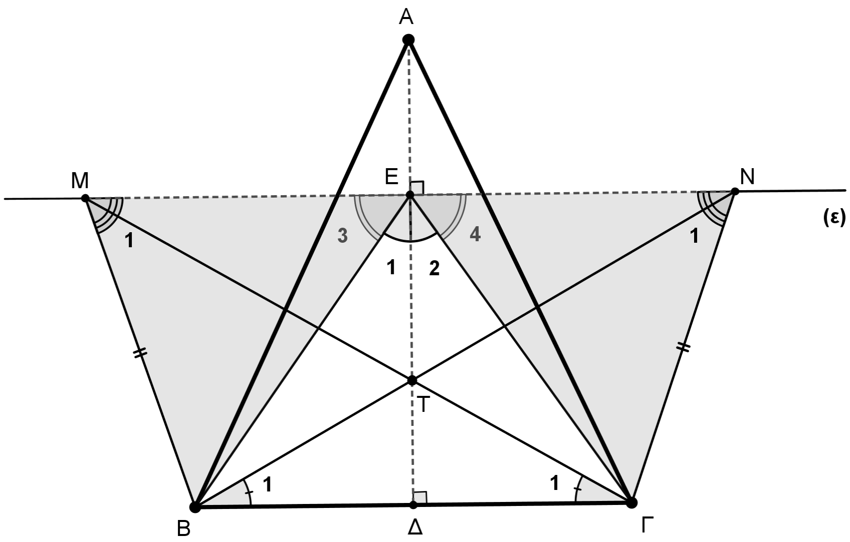
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και το ύψος του $ΑΔ$. Από τυχόν σημείο $Ε$ του ύψους $ΑΔ$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $ΒΓ$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $Μ, Ν$ έτσι ώστε $ΕΜ=ΕΝ$ και $ΜΒ<ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΓ$ και $ΝΒ$ τέμνονται πάνω στο ύψος $ΑΔ$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(ΑΒ=ΑΓ)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{Β}=\hat{Γ})$ ίσες. Άρα $ΔΒ=ΔΓ$, δηλαδή το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$.

Τα τρίγωνα τώρα $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($ΕΔ$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $ΔΒ=ΔΓ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{Ε}_1=\hat{Ε}_2$ και ΕΒ = ΕΓ.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{Ε}_3=\hat{Ε}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{Ε}_3, \hat{Ε}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Ε}_1, \hat{Ε}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα $ΕΜΒ$ και $ΕΝΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $ΕΜ=ΕΝ$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $ΕΒ=ΕΓ$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).
3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)
3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z,\ y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{matrix} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{\begin{matrix} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι κύκλοι $c_1(Α, ΑΒ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_1 = ΑΒ$) και $c_2(Α, ΑΓ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_2 = ΑΓ$). Ο κύκλος $c_1(Α, ΑΒ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Ε$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΓ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΓΑ = ΓΒ$ και $\hat{Γ} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι τετράγωνο.

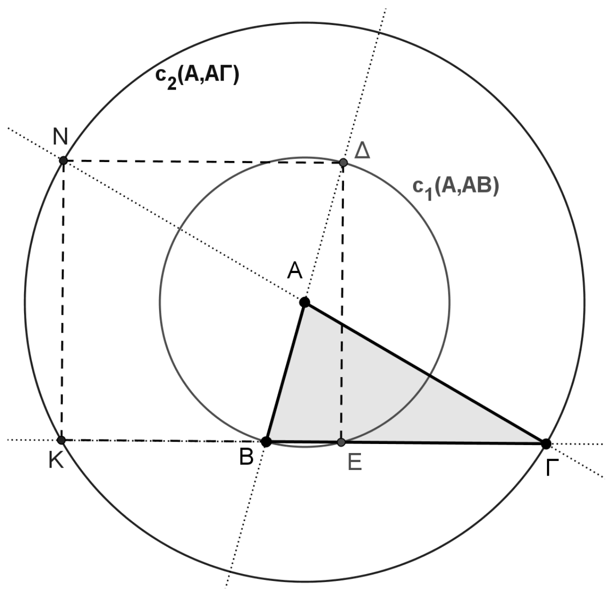
Λύση

α. Η $B\Delta$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(A, AB)$, οπότε A είναι το μέσο του $B\Delta$ και $B\hat{E}\Delta = 90^o$.
Η ΓN (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(A, A\Gamma)$, οπότε A είναι το μέσο του ΓN και $\Gamma\hat{K}N = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $N\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $N\Delta = //B\Gamma$.

Από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες NK και ΔE είναι κάθετες προς την ευθεία ΒΓ, οπότε θα είναι $NK // \Delta E$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $NK\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$KN = \frac{N\Gamma}{2} = A\Gamma = B\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας ΝΔ = ΒΓ, συμπεραίνουμε ότι ΚΝ = ΝΔ, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου ΔΕΚΝ είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\leq 4\Leftrightarrow x(4-x)\leq 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$

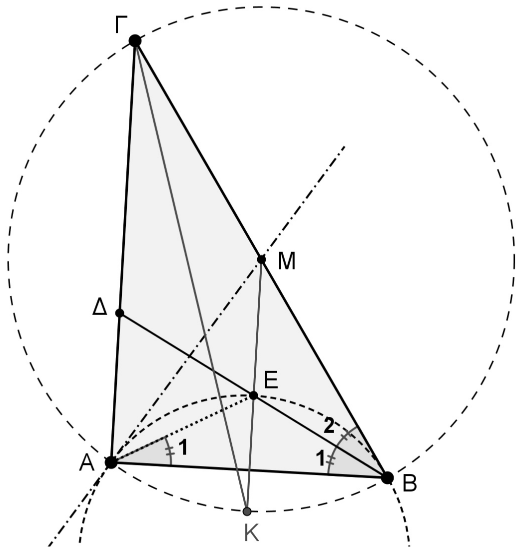
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

Λύση (1^ος^ τρόπος)

Αν θέσουμε $a=2x^2+3x+1,\ b=x^2+3x+2$, τότε $a-b=x^2-1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
a^3-b^3=7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7(a-b)^3\\
&\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0\\
&\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b\\
&\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}$$

2^ος^ τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

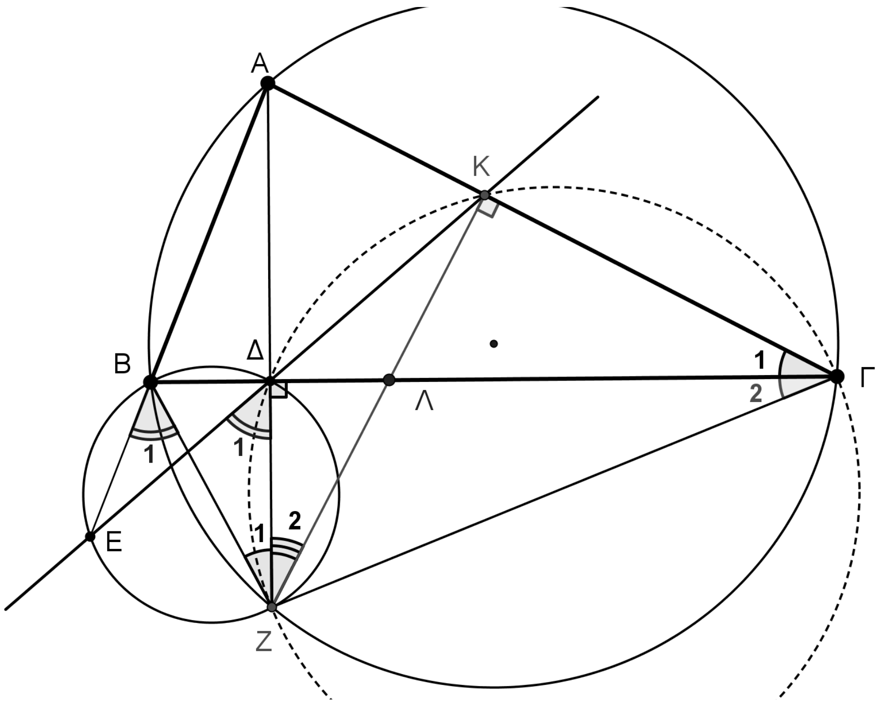
$$\begin{aligned}
&(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})\\
&\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0\\
&\qquad\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0\\
&\qquad\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Το ύψος του $ΑΔ$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο $Ζ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΔΖ$ τέμνει την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$. Αν η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την ευθεία $ΑΓ$ στο $Κ$ και η ευθεία $ΖΚ$ την $ΒΓ$ στο σημείο $Λ$, να αποδείξετε ότι το σημείο $Δ$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $ΒΛ$.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΖΓ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΔΖΕ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο ΔΚΓΖ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΓ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΖΛ η ΖΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1^o γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο 2^{o} γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο 3^{o} γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο m^{o} γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1}=2^{1}=2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m}=2^{0}=1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m}=2^{0}=1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m "γύροι" και $2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+2+1=2^{m}-1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^{n}-1=(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha+1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m=3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^{m}-1=2^{3k}-1=\left(2^{3}\right)^{k}-1=8^{k}-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)=7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10+20+30+\cdots+(m\cdot 10)=10(1+2+3+\cdots+m)=10\cdot\frac{m(m+1)}{2}=5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1)=210 \Leftrightarrow m(m+1)=42 \Leftrightarrow m=6,$$

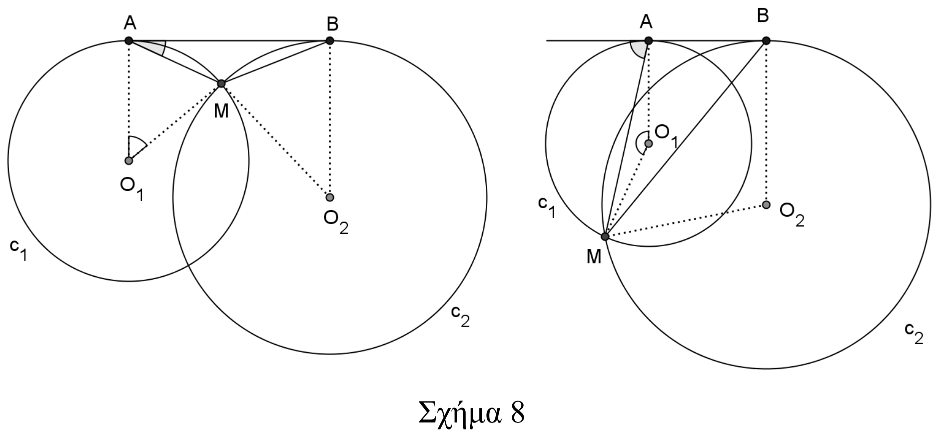
δηλαδή συμμετείχαν $2^{6}=64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1=(O_1,r_1)$ και $c_2=(O_2,r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1,c_2 και ισχύει $r_1<r_2$, να αποδείξετε ότι $MA<MB$.

Λύση

Είναι $MA=2r_1\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)$ και $MB=2r_2\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)}{r_2\cdot\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_2B}{2}\right)}. \qquad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $M\hat{A}B$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{A}B)$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{B}A)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(M\hat{A}B)}{r_2 \cdot \eta\mu(M\hat{B}A)} \qquad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\dfrac{\eta\mu(M\hat{A}B)}{\eta\mu(M\hat{B}A)} = \dfrac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ<ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $Ε\hat{Δ}Ζ$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{Β}-\hat{Γ}=20^0$.

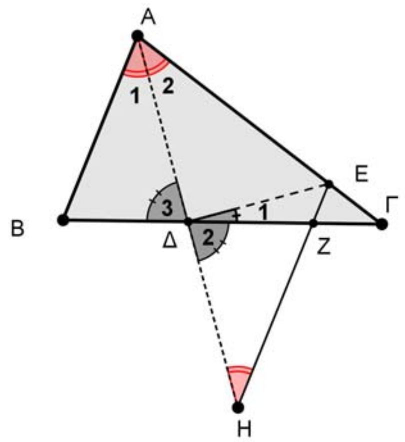
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, θα ισχύει: $\hat{Α}_1=\hat{Α}_2=\frac{\hat{Α}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Α}_1=\hat{Η}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{Α}_2=\hat{Η}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $ΕΔ\perp ΑΗ$ και $Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$



Σχήμα 1

2. Επειδή $Γ\hat{Δ}Ε=Α\hat{Δ}Ε=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\hat{Δ}_3 .$$

Η $\hat{Δ}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$, οπότε θα είναι $\hat{Δ}_3=\frac{\hat{Α}}{2}+\hat{Γ}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{Ε}_1=90^\circ-\hat{Δ}_2=90^\circ-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Α}}{2}+\frac{\hat{Β}}{2}+\frac{\hat{Γ}}{2}-\frac{\hat{Α}}{2}-\hat{Γ}=\frac{\hat{Β}-\hat{Γ}}{2}=\frac{20^o}{2}=10^o .$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4}\right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2\right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^4} = \frac{1}{4 \cdot 10000} = \frac{1}{40000}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x.$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\|(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4 .$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

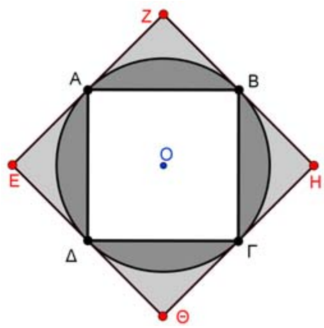
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

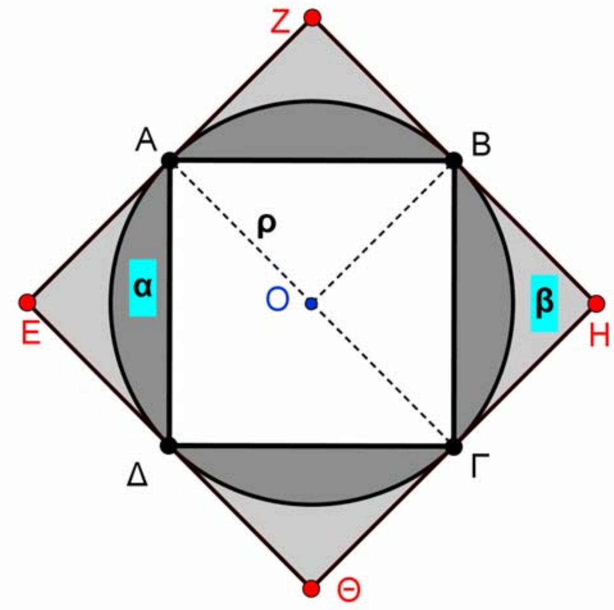
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp \mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2} .$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{O\Gamma} \perp \mathrm{H\Theta}$, έπεται ότι η $\mathrm{A\Gamma}$ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{ZH} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{2x-1}{5} < \dfrac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \;\text{ ή }\; x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \;\text{ ή }\; x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7$, $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2}\Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x\Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}\ \text{ και }\ \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-(x+1)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa(x+2)-3(\kappa x-1)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow(\kappa+1)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa = -1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = -5$ και είναι αδύνατη.
2. Αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x = \frac{8\kappa+3}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa+1)-5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z}$$

$$x = 8 - \frac{5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{\kappa+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}.$$

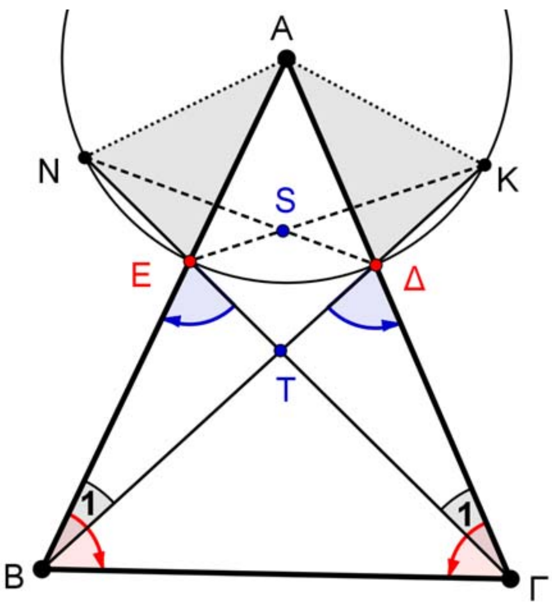
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho < \mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K, N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και S το σημείο τομής των $\mathrm{\Delta N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{B\hat{T}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{T}B}. \qquad (1)$$

- $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών
$$B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$
- $$\Delta B = \Delta\Gamma . \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $BT\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $BT\Gamma$ έχουμε: $TB = T\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $TE = T\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $A\Delta K$ και AEN. Άρα $\Delta K = EN$ και επειδή $TE = T\Delta$, καταλήγουμε $TK = TN$.

Από τις ισότητες $TE = T\Delta$ και $TK = TN$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και ΔTN.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $SEN = S\Delta K$ και στη συνέχεια η ισότητα $SAE = SAK$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$K(x) = \frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x \neq \pm\sqrt{2}.$$
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$A = \frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$
χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:
$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2} = \frac{(x+2)(2x^2-3x+1)+x-4}{x^2-2}$$
$$= \frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2} = \frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$
$$= \frac{2x(x^2-2)+x^2-2}{x^2-2} = \frac{(x^2-2)(2x+1)}{x^2-2} = 2x+1.$$

(β) Για $x = 2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:
$$A = K(2010) = 2\cdot 2010+1 = 4021.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b} = \frac{1}{c^2},$$
με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b.$ Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c\neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a\neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x=b$. Επομένως, για $a\neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y-z=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right) \qquad (1)$$

$$z-x=(y-z)\left(y^2+yz+z^2+2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2+xy+y^2+2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2+yz+z^2+2=\left(y+\dfrac{z}{2}\right)^2+\dfrac{3z^2}{4}+2>0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x>y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y>z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z>x$.

Έτσι έχουμε $x>y>z>x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x<y$. Επομένως έχουμε $x=y,$ οπότε θα είναι και $y=z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x=x^3+2x-2\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow x^3-1+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1,$$

αφού το τριώνυμο x^2+x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=-7<0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\text{Α}}$, $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο c(O,R)

στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

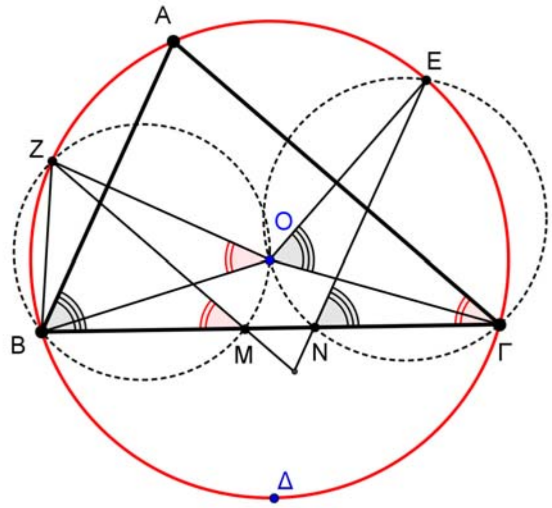
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $\mathrm{E\hat{N}\Gamma} = \mathrm{E\hat{O}\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}$ και ότι το τετράπλευρο $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμο.

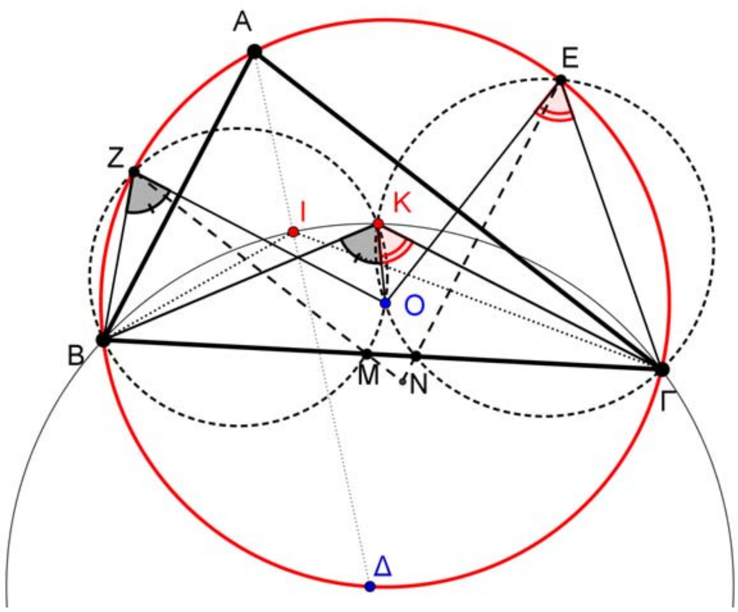
β) Επειδή το σημείο I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}{2} \text{ και } \Delta\hat{\mathrm{I}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta\mathrm{B} = \Delta\mathrm{I} = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $\mathrm{B\hat{I}\Gamma} = 90^\circ + \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{B}, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \Gamma$ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$\mathrm{B\hat{K}\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} + \frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2} = \mathrm{B\hat{I}\Gamma}.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές ($OB = OZ = R$), με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = 90^{\circ} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές ($O\Gamma = OE = R$), με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} + \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$
$$= 180^{o} - \left(90^{\circ} - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 90^{\circ} + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4 + \left(x^2+x-2\right)^4 = 16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0$ ή $\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (με πολλαπλότητα 4) ή $2x^4+12x^2-14=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (με πολλαπλότητα 4) ή $x^4+6x^2-7=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (με πολλαπλότητα 4) ή $x^2=1$ ή $x^2=-7$ (αδύνατη)

$\Leftrightarrow x=-2$ (με πολλαπλότητα 4) ή $x=1$ ή $x=-1$.

$2^{ος}$ τρόπος

Αν θέσουμε $a = x^2 + 3x + 2,\ b = x^2 + x - 2$, τότε $a - b = 2x + 4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$a^4 + b^4 = (a-b)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2 - 3ab + 2b^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0,$$

αφού η εξίσωση $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, αν $ab \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0,\ u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \text{ (διπλή)}$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$,, αν το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array}\right\}, \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + (2x+\lambda)^2\right) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 & (1) \\ y = 2x + \lambda & (2) \end{array}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4\left(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2 = -\dfrac{4}{\alpha^2} < 0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$, για $\lambda < \lambda_1$ ή $\lambda > \lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x = 0$, οπότε προκύπτει ότι $y = \lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (0, \lambda)$. Άρα είναι $\alpha = 0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \le 8 \cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega,\ d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2,3,\ldots.$$

οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \ldots + d_n &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + \ldots + n\omega &= a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1 + 2 + \ldots + n)\omega \\ &\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega. \end{aligned}$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (n+1)a_0 + \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left((1^2+1) + (2^2+2) + \ldots + (n^2+n)\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, τότε έχουμε $\omega = 6$ και

$$a_n = 1 + 3n(n+1),\ S_{n+1} = n + 1 + n(n+1)(n+2) = (n+1)\left[1 + n(n+2)\right] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n = 1 + 3n(n+1) > 10^3,\ S_{n+1} = (n+1)^3 \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1) > 333,\ n+1 \le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n > 18,\ n \le 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.$$

αφού είναι $17\cdot 18 = 306,\ 18\cdot 19 = 342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο $Τ$, τη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$ στο σημείο $Λ$ και τη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$ στο σημείο $Ν$. Να αποδείξετε ότι:

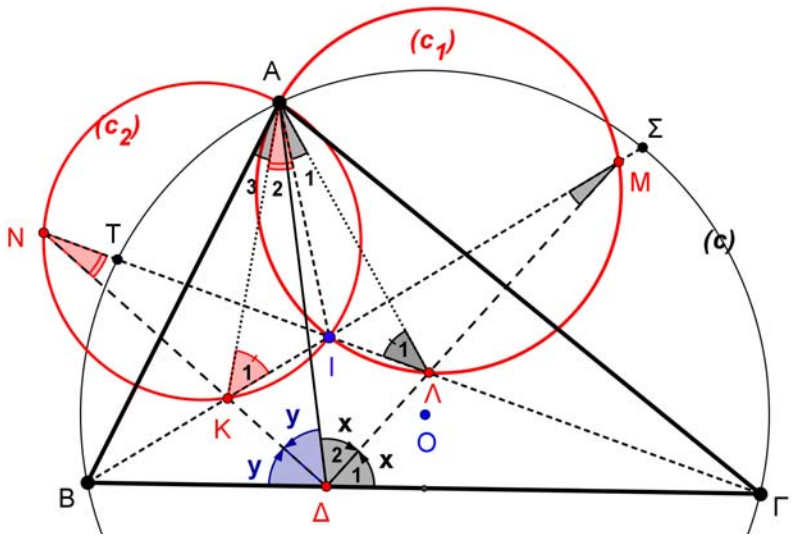
α) Τα σημεία $Α, Ι, Λ, Μ$ και $Α, Ι, Κ, Ν$ είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου $Ι$ το έκκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

β) Αν η $ΑΔ$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $ΑΒΓ$, που αντιστοιχεί στη κορυφή $Α$ τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $Κ, Λ$ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ αντίστοιχα.
Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{Α}_1 = Ι\hat{Α}Γ - Λ\hat{Α}Γ = \frac{\hat{Α}}{2} - \frac{Δ\hat{Α}Γ}{2} = \frac{\hat{Α}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{x} - \hat{Γ}}{2} = \frac{\hat{Α}}{2} - 90^o + \frac{\hat{Γ}}{2} + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{Β}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $ΜΔΒ$ έχουμε: $\hat{x} = \hat{Μ} + \frac{\hat{Β}}{2} \Leftrightarrow \hat{Μ} = \hat{x} - \frac{\hat{Β}}{2}$, δηλαδή $\hat{Α}_1 = \hat{Μ} = \hat{x} - \frac{\hat{Β}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο $ΑΙΛΜ$ είναι εγγράψιμο.
Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{Α}_2 = Ι\hat{Α}Β - Κ\hat{Α}Β = \frac{\hat{Α}}{2} - \frac{Δ\hat{Α}Β}{2} = \frac{\hat{Α}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{y} - \hat{Β}}{2} = \frac{\hat{Α}}{2} - 90^o + \frac{\hat{Β}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{Γ}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $ΝΔΓ$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{Ν} + \frac{\hat{Γ}}{2} \Leftrightarrow \hat{Ν} = \hat{y} - \frac{\hat{Γ}}{2}$, δηλαδή $\hat{Α}_2 = \hat{Ν} = \hat{y} - \frac{\hat{Γ}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο $ΑΙΚΝ$ είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον $Ι$ είναι το έκκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$Α\hat{Ι}Β = \hat{Γ} + \frac{\hat{Α} + \hat{Β}}{2} = 90^o + \frac{\hat{Γ}}{2} \text{ και } Α\hat{Ι}Γ = \hat{Β} + \frac{\hat{Α} + \hat{Γ}}{2} = 90^o + \frac{\hat{Β}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $ΑΙΚ$ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^o - A\hat{I}B - \hat{A}_2 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{N} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \hat{y}\,.$$

Από το τρίγωνο $A I \Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^o - A\hat{I}\Gamma - \hat{A}_1 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{M} = 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^o - \hat{x}\,.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta \perp B\Gamma$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^o$, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣT.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta K I \Lambda M N$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ
1^{ος} ΤΟΠΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΑΒΒΑΤΟ 19 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

1^{ο} ΘΕΜΑ : Δίνονται οι παρακάτω επτά αριθμοί :

$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{9}, \quad 0.33\,, \quad 0.3\,, \quad 0.55$

α) Ποιος είναι ο μικρότερος;
β) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
γ) Να τους κατατάξετε κατά αύξουσα διάταξη.
δ)Ποιος είναι ο μέσος όρος του μικρότερου και του μεγαλύτερου;

Μονάδες 5

Λύση

1^{ος} τρόπος. Μετατρέπω τα κλάσματα σε δεκαδικούς, κάνοντας τις διαιρέσεις αριθμητής διά παρονομαστής. $\frac{2}{3}$=0,666, $\frac{4}{5}$=0,8 , $\frac{1}{2}$=0,5 , $\frac{4}{9}$=0,444 , 0.33 , 0.3 , 0.55 . Ή

2^{ος} τρόπος. Μετατρέπω τους δεκαδικούς σε ομώνυμα κλάσματα.

$\frac{2}{3}=\frac{600}{900}, \quad \frac{4}{5}=\frac{225}{900}, \quad \frac{1}{2}=\frac{450}{900}, \quad \frac{4}{9}=\frac{400}{900}, \quad 0.33=\frac{33}{100}=\frac{297}{900}\,, \; 0.3=\frac{3}{10}=\frac{270}{900}\,, \; 0.55=\frac{55}{100}=\frac{495}{900}$

Οπότε: α) μικρότερος είναι ο 0,3

β) μεγαλύτερος είναι ο $\frac{4}{5}=0,8$

γ) κατάταξη κατά αύξουσα διάταξη : $0,3 \langle\; 0,33 \;\langle\; \frac{4}{9} \;\langle\; \frac{1}{2} \;\langle\; 0,55 \;\langle\; \frac{2}{3} \;\langle\; \frac{4}{5}$

δ) ο μέσος όρος του μικρότερου και του μεγαλύτερου είναι :

$$\frac{0,3+\frac{4}{5}}{2}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{8}{10}}{2}=\frac{\frac{11}{10}}{2}=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{2}{1}}=\frac{11}{20}$$

2^{ο} ΘΕΜΑ :

α) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που διαιρούμενοι με τον αριθμό 4 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 111 με τον αριθμό 13 και υπόλοιπο τους πρώτο φυσικό αριθμό.

Λύση

Κάνουμε την διαίρεση 111 : 13 και έχουμε πηλίκο 8 και **υπόλοιπο 7.**
Ο φυσικός αριθμός που ζητάμε θα είναι : Διαιρετέος = (διαιρέτης) Χ (πηλίκο) + (υπόλοιπο)
Άρα Δ = 4 Χ 7 + υ, όπου το υ = 2, ή 3.
Επομένως Δ = 28+2 = 30, ή Δ = 28 + 6 = 31

β) Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις και να απλοποιήσετε τα (τελικά) κλάσματα :

1) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}}=..............$ 2) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{12}:\frac{1}{2}}=..............$ 3) $\dfrac{1+\frac{2}{2}}{3\frac{4}{4}:19}=..............$

4) $\dfrac{\frac{1}{8}:2}{\frac{1}{4}\cdot 2}=..............$ 5) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}):(\frac{1}{8}:\frac{1}{4})=.............$

Μονάδες 5

<u>Λύση</u>

1) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}}=\dfrac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{9}{4}-\frac{11}{6}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{27}{12}-\frac{22}{12}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{5\cdot 12}{5\cdot 6}=2$ 2) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{12}:\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{6}{12}}{\frac{7}{12}\cdot\frac{2}{1}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{6}}=\dfrac{1\cdot 6}{2\cdot 7}=\dfrac{3}{7}$

3) $\dfrac{1+\frac{2}{2}}{3\frac{4}{4}:19}=\dfrac{1+1}{4:19}=\dfrac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{19}}=\dfrac{2\cdot 19}{4\cdot 1}=\dfrac{19}{2}$ 4) $\dfrac{\frac{1}{8}:2}{\frac{1}{4}\cdot 2}=\dfrac{\frac{1}{8}:\frac{2}{1}}{\frac{2}{4}}=\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{8}$

5) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}):(\frac{1}{8}:\frac{1}{4})=(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}):(\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{1})=\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{3}$

3^{ο} ΘΕΜΑ :

Ο Κώστας κάνει ένα συγκεκριμένο κυκλικό στίβο, τρέχοντας, σε 4 λεπτά, ο Σπύρος κάνει την ίδια διαδρομή σε 5 λεπτά και ο Πέτρος σε 6 λεπτά. Αν ξεκινήσουν και οι τρεις ταυτόχρονα από ένα σημείο Α του κυκλικού στίβου τότε :

1) Μετά από πόσο χρόνο θα βρεθούν στο ίδιο σημείο Α ταυτόχρονα και οι τρεις;

2) Πόσους κύκλους θα διαγράψει ο καθένας σ' αυτό το χρονικό διάστημα;

3) Μέσα σ' αυτό το χρονικό διάστημα, που χρειάζεται για να συναντηθούν και οι τρεις στο σημείο Α, ποιο από τα ζευγάρια (Κώστας, Σπύρος), (Κώστας, Πέτρος), (Σπύρος, Πέτρος) συναντήθηκαν τις περισσότερες φορές στο σημείο Α και πόσες φορές το κάθε ζευγάρι;

Μονάδες 5

<u>Λύση</u>

1) Ε.Κ.Π. (4,5,6)=60 . Μετά από 60 λεπτά συνάντηση και των τριών στο σημείο Α.

2) Κώστας 60:4 = 15 κύκλους
Σπύρος 60:5 = 12 κύκλους
Πέτρος 60: 6 = 10 κύκλους

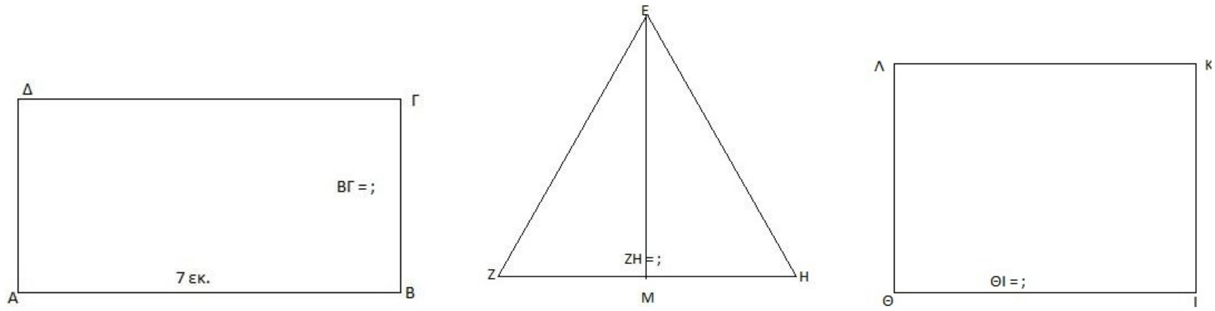
3) (Κώστας, Σπύρος) : Ε.Κ.Π. (Κώστας, Σπύρος)=Ε.Κ.Π.(4,5)=20, Άρα 60:20 = 3 συναντήσεις

(Κώστας, Πέτρος) : Ε.Κ.Π. (Κώστας, Πέτρος)=Ε.Κ.Π.(4,6)=12, Άρα 60:12 = 5 συναντήσεις

(Σπύρος, Πέτρος) : Ε.Κ.Π. (Σπύρος, Πέτρος)=Ε.Κ.Π.(5,6)=30, Άρα 60:30 = 2 συναντήσεις

4ο ΘΕΜΑ :

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με μήκος ΑΒ = 7 εκ., ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΗ και ένα τετράγωνο ΘΙΚΛ, τα οποία έχουν την ίδια περίμετρο, ίση με 24 εκ. Να υπολογίσετε :



α) Το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου και την πλευρά του τετραγώνου.

β) Τα εμβαδά του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου.

γ) Το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου, αν γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 27,72   τετ. εκ.

Μονάδες 5

<u>Λύση</u>

α) Το πλάτος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου: 24: 2 = 12,   12-7 = 5 εκ

πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου : 24 : 3 = 8 εκ

πλευρά του τετραγώνου : 24 : 4 = 6 εκ

β) Εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου : πλευράΧπλευρά = 7Χ5 = 35 τετ. εκ. και Εμβαδόν του τετραγώνου = 6Χ6 = 36 τετ.εκ.

γ) Το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου : επειδή   ΕμβΤριγ=(βάσηΧύψος):2 έχουμε 27,72Χ2:8 = 6,93 εκ.

Πληροφορίες για τη διάθεση των περιοδικών

«Ευκλείδης Α΄ – Β΄ & μικρός Ευκλείδης»

της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Πανεπιστημίου 34- τηλ.: 210-3616532-210-3617784 e-mail:info@hms.gr

Το περιοδικό απευθύνεται σε μαθητές Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου αντίστοιχα, σε εκπαιδευτικούς και σε όσους αγαπούν και ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά. Εκδίδεται σε τέσσερα (4) τεύχη και κυκλοφορεί κάθε δύο μήνες, από το Σεπτέμβρη μέχρι το Μάη κάθε σχολικής χρονιάς.

Η τιμή ενός μεμονωμένου τεύχους είναι 3 ευρώ για τα περιοδικά **Μικρό Ευκλείδη, Ευκλείδη Α΄** και 3,5 ευρώ για τον **Ευκλείδη Β΄.**

Για μεμονωμένες παραγγελίες που θα αποστέλλονται ταχυδρομικά στο συνδρομητή, η τιμή της ετήσιας συνδρομής είναι 12 ευρώ (10+2 ταχυδρομικά) για τα περιοδικά **Μικρός Ευκλείδης, Ευκλείδη Α΄** και 14 ευρώ (12+2 ταχυδρομικά) για τον **Ευκλείδη Β΄.**

Η οικονομική τακτοποίηση των συνδρομών μπορεί να γίνει:

1. **Στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.**
2. **Στα γραφεία των παραρτημάτων της Ε.Μ.Ε.**
3. **Με ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή, ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ, ΤΑΧ. ΓΡΑΦΕΙΟ ΑΘΗΝΑ 54, Τ.Θ. 30044**
4. **Με αντικαταβολή στην ACS εταιρεία ταχυμεταφορών κατά την παράδοση στον χώρο σας**
5. **Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς:**
   - **Τράπεζα Eurobank EFG, λογαριαμός όψεως 026 0201 94 0201575138**
     IBAN GR9002602010000940201575138
   - **Τράπεζα ΕΘΝΙΚΗ, λογαριασμός όψεως 080/48002300**
     IBAN GR87 0110 0800 0000 0804 8002 300
   - **Τράπεζα ALPHA, λογαριαμός όψεως 10 100 200 20 19 988**
     IBAN GR86 0140 1010 1010 0200 2019 988

Στην περίπτωση που η πληρωμή θα γίνει σε τράπεζα πρέπει να αποστείλετε στο Fax της ΕΜΕ (210-3641025) την απόδειξη κατάθεσης συμπληρωμένη με τα πλήρη στοιχεία του καταθέτη (ονοματεπώνυμο, διεύθυνση, τηλέφωνο, περιοδικό για το οποίο ενδιαφέρεστε) ώστε να είναι εφικτή η ορθή αποστολή των περιοδικών.

Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να καλέσετε στα γραφεία της ΕΜΕ 210-3616532 και 210-3617784.