ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4 .

(*Σημείωση:* $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$).

Λύση

Εφόσον οι αριθμοί x, y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.

Εφόσον οι αριθμοί x, y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c < a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a, c) μπορεί να είναι:

$$(8, 6) \text{ ή } (8, 4) \text{ ή } (8, 2) \text{ ή } (6, 4) \text{ ή } (6, 2) \text{ ή } (4, 2).$$

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές του $b = 0$ ή $b = 1$ ή $b = 2$ ή $b = 3$ ή $b = 4$ ή $b = 5$ ή $b = 6$ ή $b = 7$ ή $b = 8$ ή $b = 9$

(σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x = \overline{abc}$ είναι οι: $884, 864, 844, 824, 804$ και $692, 672, 652, 632, 612$.

Οι αριθμοί $y = \overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x = \overline{abc}$.

Πρόβλημα 2

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:

Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη

Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta = 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta$$
$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta.$$

Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

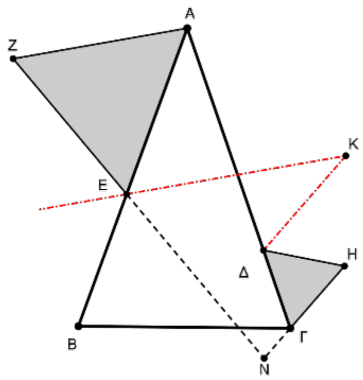
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B\hat{E}Z}$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}H}$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

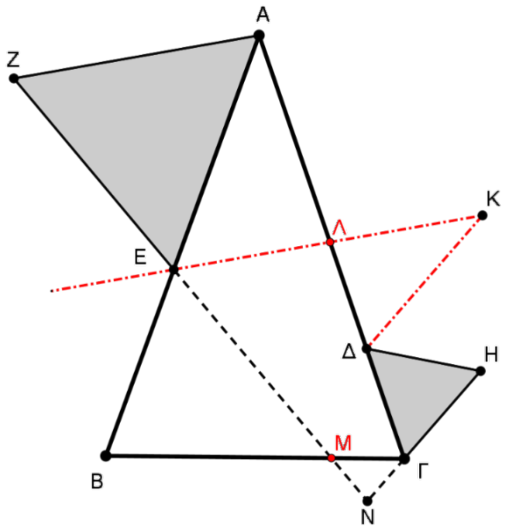
Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\hat{K}\Delta = B\hat{A}\Gamma$

(β) $E\hat{N}\Gamma = 120^0 - B\hat{A}\Gamma$



Λύση



Έστω τώρα Μ η τομή της ΕΝ με την ΒΓ και Λ η τομή της ΕΚ με την ΑΓ . Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $\mathrm{E\widehat{K}\Delta = \Lambda\widehat{K}\Delta} = 180° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} - \mathrm{K\widehat{\Delta}\Lambda} = 180° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} - 60° = 120° - \mathrm{K\widehat{\Lambda}\Delta} =$
$= 120° - \mathrm{A\widehat{\Lambda}E} = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - \mathrm{A\widehat{E}\Lambda}\right) = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60°\right) = \widehat{\mathrm{A}}.$

(β) $\mathrm{E\widehat{N}\Gamma = M\widehat{N}\Gamma} = 180° - \mathrm{N\widehat{M}\Gamma} - \mathrm{N\widehat{\Gamma}M} = 180° - \mathrm{E\widehat{M}B} - \mathrm{N\widehat{\Gamma}M} =$

$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B\widehat{E}M}\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - \mathrm{\Delta\widehat{\Gamma}H}\right) =$$
$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - 60°\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - 60°\right) =$$
$$= \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} - 60° = 180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60° = 120° - \widehat{\mathrm{A}}.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Λύση

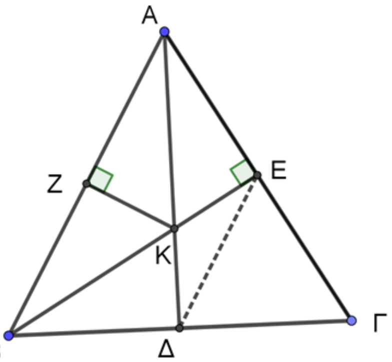
Ο αριθμός που μπορεί να γράψει ο Γιάννης θα τελειώνει σε 9 ή σε 2, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 5.
Επίσης, το άθροισμα των ψηφίων οποιουδήποτε αριθμού μπορεί να γράψει ο Γιάννης είναι της μορφής $9\kappa + 2 = \pi o\lambda.3 + 1$, οπότε ο αριθμός δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επίσης δεν μπορεί να διαιρείται με το 6 ή το 9 που είναι πολλαπλάσια του 3.
Θα εξετάσουμε τώρα τη δυνατότητα να διαιρείται ο αριθμός με κάποιους από τους αριθμούς 2, 4, 7 και 8.
Ο αριθμός που θα γράψει ο Γιάννης θα διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2. Στη περίπτωση που το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2, τότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα είναι σε κάθε περίπτωση το 92 που διαιρείται με το 4, οπότε και ο αριθμός θα διαιρείται με το 4.
Έτσι, απομένει η περίπτωση να διαιρείται ο αριθμός με το 8 και το 7.
Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 992 διαιρείται με το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7.
Επιπλέον παρατηρούμε ότι η επισύναψη του ψηφίου 9 στα αριστερά του αριθμού 992 τον αυξάνει κατά $9000 = 9 \cdot 1000 = 9 \cdot 125 \cdot 8$, που είναι πολλαπλάσιο του 8. Ομοίως η επισύναψη του ψηφίου 9 αριστερά του 992 περισσότερες φορές αυξάνει τον αριθμό κατά αριθμό πολλαπλάσιο του 1000, άρα και του 8, οπότε ο αριθμός που προκύπτει σε κάθε περίπτωση διαιρείται με το 8.
Επομένως αρκεί να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό φορών που πρέπει να επισυνάψουμε αριστερά το 9 ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 7. Παρατηρούμε ότι:

$$992 = 7 \cdot 141 = 5, 9000 = 7 \cdot 1285 + 5 \Rightarrow 9992 = \pi o\lambda.7 + 10 = \pi o\lambda.7 + 3,$$
$$90000 = 10 \cdot 9000 = \pi o\lambda.7 + 50 = \pi o\lambda.7 + 1 \Rightarrow 999992 = \pi o\lambda.7 + 4,$$
$$900000 = 10 \cdot 90000 = \pi o\lambda.7 + 10 = \pi o\lambda.7 + 3 \Rightarrow 999992 = \pi o\lambda.7.$$

Επομένως ο ελάχιστος δυνατός θετικός ακέραιος που μπορεί να γράψει ο Γιώργος ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ είναι ο αριθμός 999992. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με τους, 2,4,8 και 7.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.

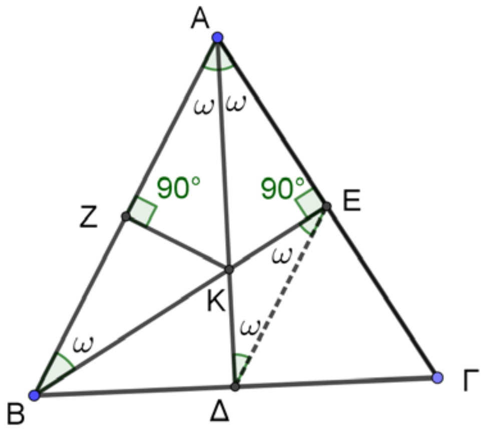


(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $K\Delta = KE = KZ$.

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)

Λύση



(α) Αν θέσουμε $\hat{A} = 2\omega$, τότε $B\hat{A}K = K\hat{A}\Gamma = \omega$.

Επειδή ΖΚ μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ έπεται ότι $KA = KB$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $K\hat{B}A = K\hat{A}B = \omega$. Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^0 - 90^0 \Rightarrow 2\omega + \omega = 90^0 \Rightarrow 3\omega = 90^0 \Rightarrow \omega = 30^0,$$

οπότε θα είναι $\hat{A} = 2\omega = 60^0$.

(β) Αν η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, τότε από τις εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με τέμνουσες τις ευθείες ΑΔ και ΒΕ, έχουμε:

$$A\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Delta = A\hat{B}E = K\hat{E}\Delta = \omega,$$

οπότε το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές με $K\Delta = KE$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A;

Λύση

Η Μαρία είχε ετοιμάσει συνολικά $A - 1$ κάρτες για να στείλει σε όλους τους συμμαθητές της. Επομένως, έστειλε τελικά $(A-1) - \frac{A}{4} = \frac{3A}{4} - 1$ κάρτες. Το $\frac{1}{10}$ αυτών είναι $\frac{1}{10}\left(\frac{3A}{4} - 1\right) = \frac{3A-4}{40}$ και πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, αφού αντιστοιχεί σε μαθητές που έλαβαν κάρτα εγκαίρως. Επομένως, για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του Α, το $3A - 4$ πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό πολλαπλάσιο του 40. Η εξίσωση $3A - 4 = 40$, δεν δίνει ακέραια τιμή για το A, οπότε κοιτάζουμε το αμέσως επόμενο πολλαπλάσιο που είναι το 80. Η εξίσωση $3A - 4 = 80$ έχει λύση $A = 28$, επομένως αυτή είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του Α.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{array}\right\}$$

Λύση
Για $x \neq 3y$ διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης (2) με $(x-3y)$ οπότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)+\dfrac{2}{x-3y}=6 \end{array}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου $5x-2y=\alpha$ και $\dfrac{1}{x-3y}=\beta$,

το τελευταίο σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha+\dfrac{3\beta}{2}=\dfrac{13}{2} \\ \alpha+2\beta=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2\alpha+3\beta=13 \\ \alpha+2\beta=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha=8 \\ \beta=-1 \end{array}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} 5x-2y=8 \\ \dfrac{1}{x-3y}=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 5x-2y=8 \\ x-3y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x=2 \\ y=1 \end{array}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους $N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta, 0<\alpha<\beta$,
που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta=8[\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)]\leq 8(1+2+\ldots+10)=440,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 4$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha=4$. Τότε $415 \leq N \leq 419$, Nπολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow \mathrm{N}=416$. Παρατηρούμε όμως ότι
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=4+5+6+7=22$ και $22\cdot 8=176 \neq 416$.

- $\alpha = 3$. Τότε $314 \leq N \leq 319, N$ πολλαπλάσιο του 8, άτοπο.
- $\alpha = 2$. Τότε $213 \leq N \leq 219, N$ πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N} = 216$.
  Παρατηρούμε ότι:
  $\alpha + (\alpha + 1) + \cdots + \beta + (\beta + 1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$και $27 \cdot 8 = 216$.
- $\alpha = 1$. Τότε $112 \leq N \leq 119, N$ πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N} = 112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha + (\alpha + 1) + \cdots + \beta + (\beta + 1) = 1 + 2 + 3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.

Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $\mathrm{N} = 216$.

2ος τρόπος: Επειδή ο αριθμός διαιρείται με το 8, θα διαιρείται και με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα διαιρείται με το 4. Επομένως ο αριθμός $\overline{1\beta}$ θα διαιρείται με το 4. Συνεπώς $\beta = 2$ ή $\beta = 6$.

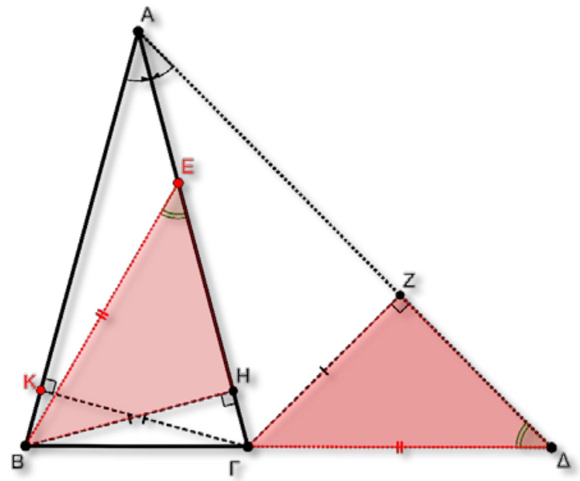
- Αν $\beta = 2$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$, παίρνουμε ότι $\alpha = 1$, οπότε $\mathrm{N} = 112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha + (\alpha + 1) + \cdots + \beta + (\beta + 1) = 1 + 2 + 3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.
- Αν $\beta = 6$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$ παίρνουμε $\alpha \in \{1,2,3,4,5\}$. Όμως $N = 100\alpha + 16$, άρα για να διαιρείται με το 8, πρέπει α άρτιος. Επομένως, $\alpha = 2$ ή $\alpha = 4$. Για $\alpha = 2$, παίρνουμε $N = 216$, που ικανοποιεί, ενώ για $\alpha = 4$, παίρνουμε $N = 416$, που δεν ικανοποιεί.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}$.

Λύση

Από το σημείο Β θεωρούμε ΒΗ κάθετη στην ΑΓ , από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΚ κάθετη στην ΑΒ και από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΖ κάθετη στην ΑΔ.



Εφόσον $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ και κατά συνέπεια:

$$\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{K} \qquad (1).$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα τα τμήματα ΓΚ και ΒΗ είναι ίσα μεταξύ τους (διότι είναι τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του). Άρα:

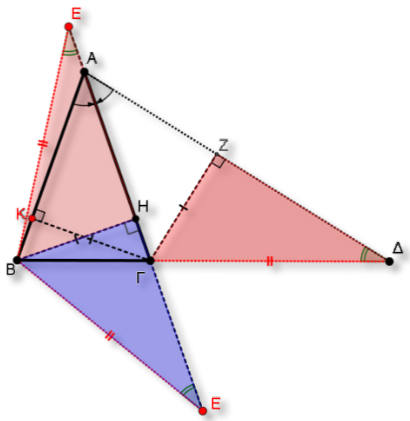
$$\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{K} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{Z} \qquad (3)$.

Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΖΔΓ, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: $\mathrm{BE} = \Gamma\Delta$ (δεδομένο) και $\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{Z}$ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση

Το σημείο E θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος $A\Gamma$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) … και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία (συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα)	

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρείς σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 2x^2(x - 2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 =$$

$$= 2x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - (x - 2)(x + 2) =$$

$$= (x - 2)(2x^2 - 3x - 2) = (x - 2)^2(2x + 1).$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x-2)^2(2x+1)+(y-2)^2(2y+1)+(z-2)^2(2z+1)=0.$$

Επειδή όμως $x, y, z > 0$, θα πρέπει $x = y = z = 2$, οπότε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση των παρενθέσεων μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του σχήματος Horner (αναζητώντας λύσεις μεταξύ των διαιρετών του 4).

2ος τρόπος: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο x είναι ο μικρότερος από τους τρεις αριθμούς. Επομένως, $x \leq y$ και $x \leq z$. Επομένως, η τρίτη εξίσωση δίνει

$$2x^3-7x^2+4x \leq 2z^3-7x^2+4y=-4 \quad (1)$$

Όπως και στον 1ο τρόπο, έχουμε ότι $2x^3-7x^2+4x+4=(x-2)^2(2x+1)$,
επομένως η (1) δίνει ότι $(x-2)^2(2x+1) \leq 0$ (2).
Πρέπει λοιπόν να ισχύει η ισότητα στη (2), άρα και στην (1), επομένως, $x = y = z = 2$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta, 0<\alpha<\gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2+\alpha^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha-1$ μέχρι και τον $\gamma+1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta=8[(\alpha-1)^2+\alpha^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2]$$
$$\leq 8(0^2+1^2+2^2+\ldots+10^2)=3080,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\alpha = 3$, και $\gamma \leq 8$ έχουμε

$$8[2^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2] \leq 8[2^2+\cdots+8^2+9^2] < 3000, \text{ αδύνατο.}$$

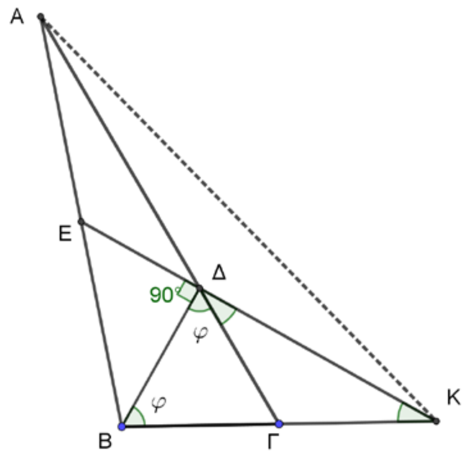
Άρα πρέπει $\gamma = 9$.
Για $\gamma = 9$, δεν έχουμε επίσης λύση γιατί

$$8(2^2+\cdots+8^2+9^2+10^2)=3072, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\alpha = 2$, τότε αν $\gamma \leq 7$ έχουμε: $8[1^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2] \leq 8[1^2+\cdots+8^2] < 2000$, αδύνατο. Άρα $\gamma = 8$ ή $\gamma = 9$.
Για $\gamma = 8$ έχουμε $8[1^2+\cdots+8^2+9^2]=2280$, δεκτή.
Για $\gamma = 9$ έχουμε $8[1^2+\cdots+8^2+9^2+10^2] > 3000$, αδύνατο.
Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε ότι για $\gamma \geq 8$ ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από $8[1^2+\cdots+8^2+9^2]=2280$, αδύνατο.
Επίσης για $\gamma \leq 5$ έχουμε ότι ο αριθμός είναι μικρότερος από $8[1^2+\cdots+6^2]=728$, άτοπο. Επομένως $\gamma = 6$ ή $\gamma = 7$. Όμως και οι δύο περιπτώσεις δεν οδηγούν σε λύση,

αφού για $\gamma = 6$ ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 7^2] = 1120$, αδύνατο. Τέλος για $\gamma = 7$ έχουμε ότι ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 8^2] = 1632$, επίσης αδύνατο.
Επομένως, μοναδική λύση είναι ο αριθμός 2280.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\Gamma > \mathrm{B\Gamma}$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{B}$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3 \cdot \mathrm{B\Gamma}$.
Λύση
Έστω Ε το μέσον της ΑΒ. Έστω ότι η κάθετη ευθεία προς την ευθεία ΔΒ στο σημείο Δ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ. Επειδή είναι $\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\Delta$, έπεται ότι $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma = \varphi$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΚ έχουμε ότι $\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{K} = \Gamma\widehat{\mathrm{K}}\Delta = 90^0 - \varphi$. Επομένως. το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές με συνέπεια $\Gamma\mathrm{K} = \Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{B}$, δηλαδή το Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ και η ευθεία ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΚ



Επειδή η ευθεία ΚΔ περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΒ, έπεται ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΚ. Επομένως έχουμε $\mathrm{A}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$ και

$$\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}\Delta + \Delta\Gamma = 2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma = 3 \cdot \Delta\Gamma = 3 \cdot \mathrm{B}\Gamma.$$

2ος τρόπος: Ονομάζουμε Μ το μέσον της ΑΒ. Θεωρούμε τα μέσα Ν, Ρ των τμημάτων ΑΔ και ΔΒ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΝΔ=ΔΓ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα

$$\mathrm{MN}//= \frac{\Delta\mathrm{B}}{2} = \Delta\mathrm{P}\ (1)$$

Από την παραλληλία προκύπτει ότι $\Delta\mathrm{M} \perp \mathrm{MN}$ και $\angle\mathrm{MN}\Delta = \angle\mathrm{B}\Delta\Gamma$ (2).
Από τις (1), (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΜΝΔ και ΓΔΡ είναι ίσα, άρα ΓΔ=ΔΝ, που είναι το ζητούμενο.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:
$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$
$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

Λύση
Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι ο γ πρέπει να είναι περιττός ακέραιος, αφού διαφορετικά θα προέκυπτε ότι ο ακέραιος $4\alpha^2 - 6\beta^2 - 5\gamma^2 = 25$ είναι άρτιος.
Επίσης από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$.
Πράγματι, αν ήταν $\alpha \leq \beta$ ή $\alpha \leq \gamma$, τότε θα είχαμε $4\alpha^2 < 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$.
Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε:
$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34 < 5\alpha + 34 \Rightarrow 8\alpha < 34 \Rightarrow \alpha \in \{1,2,3,4\}.$$
Η περίπτωση $\alpha = 1$ αποκλείεται, αφού $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$. Ομοίως για $\alpha = 2$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = -9, 3\beta + 2\gamma = -8$, (αδύνατο). Για $\alpha = 3$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 11, 3\beta + 2\gamma = 5$ με μοναδική λύση στους θετικούς ακέραιους $\beta = \gamma = 1$. Για $\alpha = 4$ προκύπτει το σύστημα $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 39, 3\beta + 2\gamma = 18$, το οποίο δεν έχει ακέραιες λύσεις.
Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1, 1)$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει
$$f(2f(x) + y) = f(f(y) + x) + x. \ (*)$$
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z) = \alpha$ και ότι η f είναι 1-1.
(β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (*).

Λύση
(α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου y το $-2f(x)$ παίρνουμε
$$f(0) - x = f(f(-2f(x)) + x) \qquad (1)$$
Επομένως, αν θέσουμε όπου x το $-\alpha + f(0)$ στην (1), βρίσκουμε z ώστε $f(z) = \alpha$.
Για το 1-1, παίρνουμε y_0 ώστε $f(y_0) = 0$. Για y το y_0 η (1) δίνει
$$f(2f(x) + y_0) = f(x) + x \qquad (2).$$
Επομένως, αν x_1, x_2με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $f(2f(x_1) + y_0) = f(2f(x_2) + y_0)$, άρα από την (3) $f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2$, άρα $x_1 = x_2$.

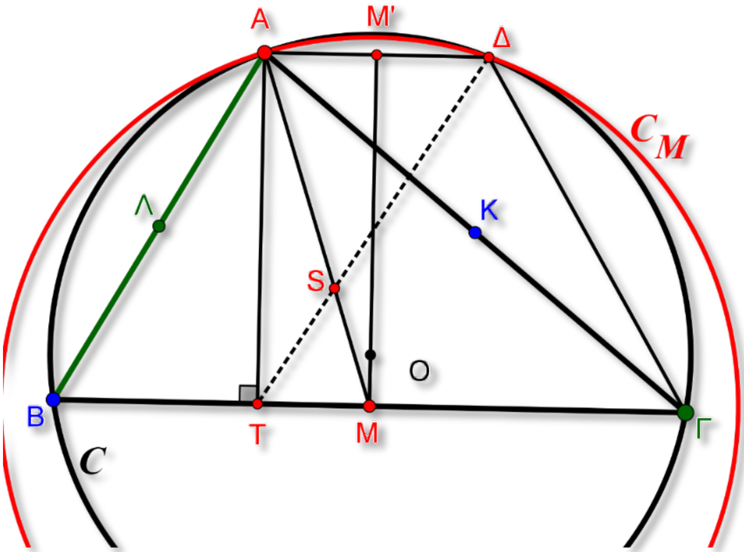
(β) Αν θέσουμε όπου x το 0 στην (*), παίρνουμε $f(2f(0) + y) = f(f(y))$ και αφού η f είναι 1-1 θα ισχύει $f(y) = 2f(0) + y$, δηλαδή $f(y) = y + c$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Αντικαθιστώντας στη σχέση (*) παίρνουμε $f(2(x + c) + y) = f(x + y + c) + x \Rightarrow$ $2x + y + 3c = 2x + y + 2c$, οπότε $c = 0$.
Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο Ο και ακτίνα R. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Κ, Λ των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ (αντίστοιχα) καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA), C_K K, KB), C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία Μ, Κ, Λ και ακτίνες ΜΑ, ΚΒ, ΛΓ , αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Τ, Ρ, Σ είναι οι προβολές των κορυφών Α, Β, Γ , αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔΤ, ΕΡ και ΖΣ συντρέχουν.

Λύση

Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο το μέσο Μ της ΒΓ και ακτίνα ΜΑ (C_M), τέμνει το κύκλο C στο σημείο Δ. Έστω ακόμη Τ η προβολή της κορυφής Α στη πλευρά. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΔΤ περνάει από σταθερό σημείο.



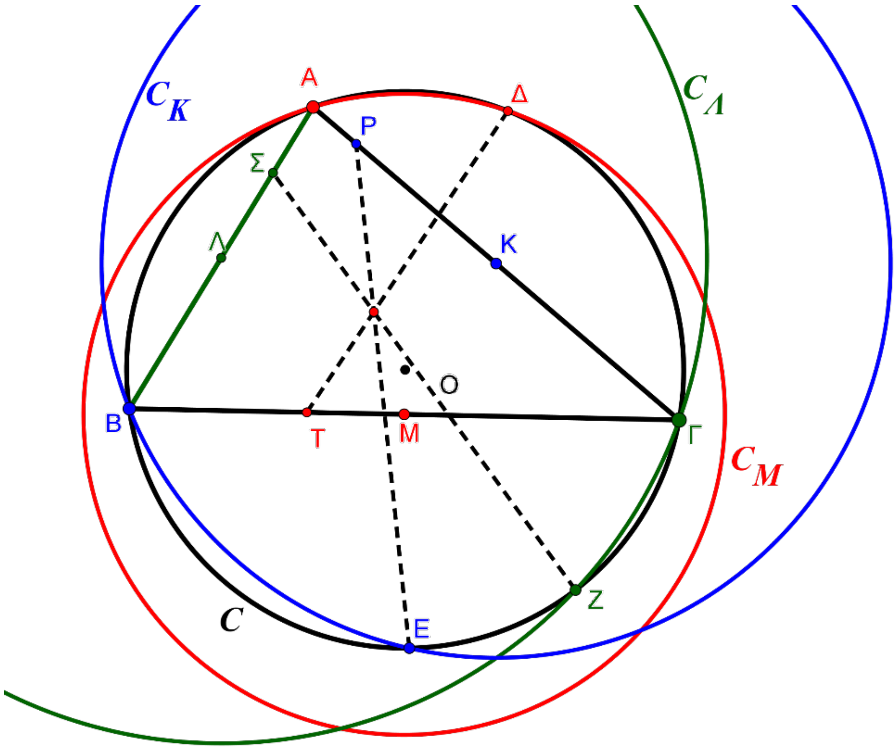
Η ΟΜ είναι διάκεντρος των κύκλων C και C_M. Άρα η ΟΜ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΔ των δύο κύκλων. Η ΟΜ είναι (επίσης) μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ του κύκλου C. Οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, εγγεγραμμένο στον κύκλο C. Έστω ότι η προέκταση της ΟΜ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Μ′. Τότε το Μ′ θα είναι το μέσο της ΑΔ, οπότε θα ισχύει:

$$MT = AM' = \frac{A\Delta}{2} \qquad (1).$$

Αν τώρα οι ΑΜ και ΔΤ τέμνονται στο σημείο S. Τότε τα τρίγωνα ΑΔS και MTS είναι όμοια και κατά συνέπεια:

$$\frac{SA}{SM} = \frac{A\Delta}{MT} \overset{(1)}{=} 2.$$

Άρα το σημείο S είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι ΕΡ και ΖΣ διέρχονται από το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



C_K
A
Δ
$C_Λ$
P
Σ
Λ
K
O
B
T
M
Γ
C_M
Z
C
E