

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ**

**Ημερίδα για τη Γεωμετρία στα νέα Προγράμματα Σπουδών**

**Εισηγητής**

**Γιάννης Θωμαΐδης**

**Δρ. Μαθηματικών – τ. Σχολικός Σύμβουλος**

**Μπορεί ένα πρόγραμμα σπουδών να γίνει βασικό  
εργαλείο της διδασκαλίας; Η περίπτωση της  
Γεωμετρίας στα νέα προγράμματα σπουδών της  
Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου**

**Βόλος, 24 Φεβρουαρίου 2023**

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Νοέμβριο του 2021 αναρτήθηκαν στον ιστότοπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) και δημοσιεύτηκαν σε Φ.Ε.Κ. νέα προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά του Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου (βλ. [1], [2] και [3]). Τα προγράμματα εκπονήθηκαν από ομάδες ειδικών επιστημόνων και εκπαιδευτικών, εφαρμόστηκαν πιλοτικά στα Πρότυπα-Πειραματικά Σχολεία, αξιολογήθηκαν και αναθεωρήθηκαν. Την περίοδο αυτή έχει αρχίσει η δημοσίευση των αναθεωρημένων προγραμμάτων σε Φ.Ε.Κ. και θα ακολουθήσει η προκήρυξη διαγωνισμού για τη συγγραφή νέων διδακτικών βιβλίων Μαθηματικών. Βασικό χαρακτηριστικό των νέων προγραμμάτων είναι ότι επιχειρούν μια ριζική αναδιάρθρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, τόσο από πλευράς περιεχομένου όσο και διδακτικής μεθοδολογίας. Για παράδειγμα, τα Στοχαστικά Μαθηματικά γίνονται διακριτό θεματικό πεδίο στη διδακτέα ύλη όλων των τάξεων της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επεκτείνεται από την Γ΄ Γυμνασίου μέχρι την Γ΄ Λυκείου και διευρύνεται σημαντικά η διδακτέα/εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου και των πανελλαδικών εξετάσεων.

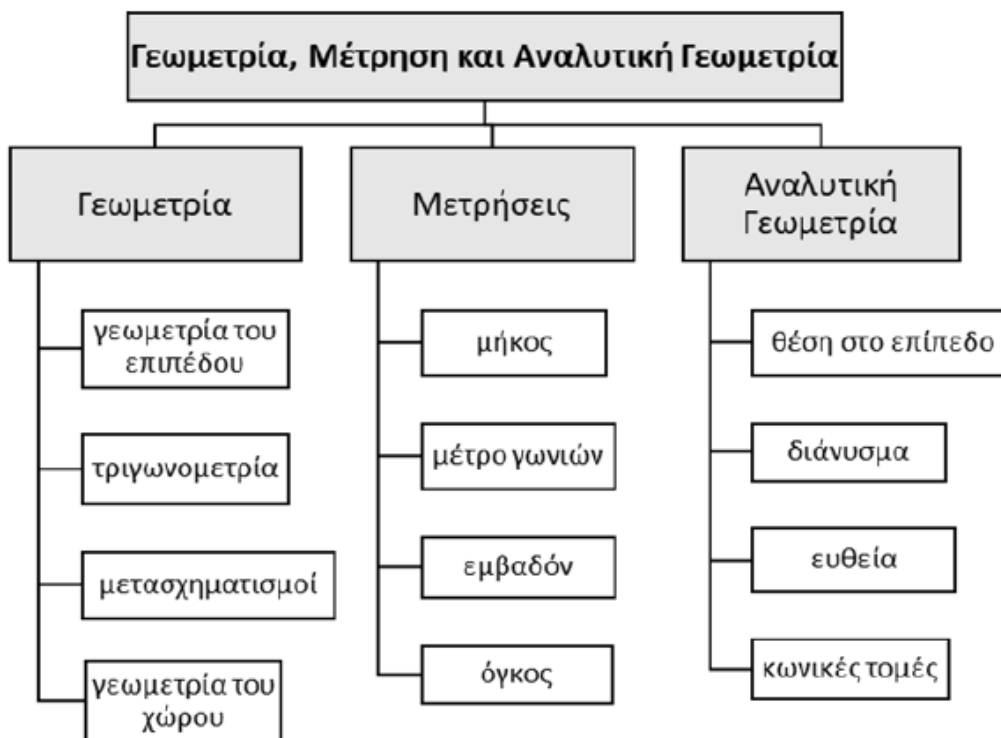
Στην εισήγηση θα ασχοληθούμε με τη νέα δομή της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, και ιδιαίτερα στο κρίσιμο στάδιο της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Συγκεκριμένα, θα αξιοποιήσουμε τα νέα προγράμματα σπουδών για να τεθεί προς συζήτηση και αξιολόγηση μια ενιαία πρόταση διδασκαλίας του μαθήματος στην Γ΄ Γυμνασίου και την Α΄ Λυκείου. Κεντρικός στόχος είναι η εξοικείωση των εκπαιδευτικών με ορισμένες βασικές καινοτομίες που προωθούν τα νέα προγράμματα σπουδών, τις οποίες όμως θα προσεγγίσουμε έχοντας οδηγό τα μεγάλα προβλήματα που αντιμετωπίζει η διδασκαλία και μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τις τελευταίες δεκαετίες.

Η εισήγηση αναπτύσσεται σε δύο μέρη, το εισαγωγικό στο οποίο αναλύονται οι βασικές αρχές των νέων προγραμμάτων που αφορούν τη Γεωμετρία και το κύριο μέρος στο οποίο παρουσιάζονται και αξιολογούνται διδακτικές δραστηριότητες.

## ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

Στην εισήγηση θα γίνει αρχικά μια ανάλυση του καθιερωμένου τρόπου διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ο οποίος έχει οδηγήσει σε μια κατάσταση υποβάθμισης και απαξίωσης του μαθήματος. Υπάρχουν πολλοί δείκτες της υποβάθμισης, που εκτείνονται από τα ζητήματα διαχείρισης και τις ακολουθούμενες διδακτικές πρακτικές (όπως οι αναθέσεις του μαθήματος και η μη πραγματοποίηση των προβλεπόμενων ωρών διδασκαλίας), μέχρι τα μαθησιακά αποτελέσματα που εκδηλώνονται όταν στις πανελλαδικές εξετάσεις της Γ' Λυκείου απαιτείται σε κάποιο ερώτημα η χρήση βασικών γεωμετρικών γνώσεων. Στο πλαίσιο αυτό θα γίνει συζήτηση για το εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται σήμερα (πρόγραμμα σπουδών, διδακτικό βιβλίο, οδηγίες διδασκαλίας) και τον τρόπο που αξιοποιείται από τους διδάσκοντες.

Θα ακολουθήσει μια παρουσίαση και συζήτηση της δομής του μαθήματος στα νέα προγράμματα σπουδών, τα οποία εντάσσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία στο θεματικό πεδίο «Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία» μεταφέροντας ένα σημαντικό μέρος της παραδοσιακής διδακτέας ύλης από την Α' Λυκείου στην Γ' Γυμνασίου.



Οι ενότητες του προηγούμενου διαγράμματος αναπτύσσονται σε όλο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη μορφή «μαθησιακών τροχιών», και οι συντάκτες των νέων προγραμμάτων περιγράφουν το σκοπό της διδασκαλίας του συγκεκριμένου θεματικού πεδίου ως εξής (βλ. [2], σ.67831 ή [3], σ.69383):

Η μελέτη του πεδίου Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία συμβάλλει στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης προσφέροντας δυνατότητες ερμηνείας και παρέμβασης στο φυσικό και δομημένο περιβάλλον. Επιπλέον, υποστηρίζει την αξιοποίηση εργαλείων μελέτης άλλων θεμάτων στα Μαθηματικά και την επιστήμη. Το πιο σημαντικό, ωστόσο, είναι ότι με τη μελέτη της Γεωμετρίας αναπτύσσεται η μαθηματική συλλογιστική, με την οποία αναπτύσσεται τόσο η λογική επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, η οποία είναι σημαντική για κάθε πολίτη, όσο και η δημιουργική σκέψη σε πολλούς τομείς.

Η πρώτη σημαντική καινοτομία των νέων προγραμμάτων είναι ότι η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου δεν αρχίζει από «μηδενική βάση», αλλά από το τέταρτο κεφάλαιο του σημερινού βιβλίου («Παράλληλες ευθείες») που έχει ως κύριο αντικείμενο το αίτημα του Ευκλείδη και την πρόταση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου. Η διδασκαλία του τρίτου κεφαλαίου («Τρίγωνα») που περιλαμβάνει τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και τις εφαρμογές τους μεταφέρεται στην Γ΄ Γυμνασίου, ενώ η ύλη του πολύ βασικού δεύτερου κεφαλαίου («Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα») που περιλαμβάνει τους ορισμούς των γεωμετρικών σχημάτων πρέπει πλέον να θεωρείται «γνωστή» από τη διδασκαλία μιας αντίστοιχης ενότητας στο πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Γυμνασίου.

Αυτές οι μετακινήσεις της ύλης προς «προς τα κάτω» συνδέονται με τη δεύτερη σημαντική καινοτομία που προωθούν τα νέα προγράμματα: Στην Α΄ Λυκείου, αμέσως μετά τη διδασκαλία των παραλληλογράμμων, των τραπεζίων και των εφαρμογών τους, προβλέπεται να διδαχθούν οι βασικές έννοιες της γεωμετρίας του χώρου.

Μετά την παρουσίαση και συζήτηση των καινοτομιών, θα γίνει μια σύγκριση με τα ισχύοντα προγράμματα σπουδών και τις αντίστοιχες οδηγίες διδασκαλίας και θα επισημανθούν ορισμένα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζει σήμερα η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Τα προβλήματα αυτά οφείλονται κυρίως στον άκαμπτο τρόπο της διδασκαλίας του μαθήματος τις προηγούμενες δεκαετίες και έχουν γίνει αρκετές φορές αντικείμενο συζήτησης και συστηματικής μελέτης (βλ. π.χ. τα [4], [5] και [6]). Στο [5] τα προβλήματα περιγράφονται ως εξής:

1. Η ασυνέχεια στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ανάμεσα σε Γυμνάσιο και Λύκειο.
2. Ο μονομερής θεωρητικός προσανατολισμός και η έλλειψη εφαρμογών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.
3. Η έλλειψη διαύλων επικοινωνίας ανάμεσα σε Ευκλείδεια Γεωμετρία και Άλγεβρα/Τριγωνομετρία που διδάσκονται ως χωριστοί κλάδοι στην Α΄ και Β΄ Λυκείου.
4. Η ασυμβατότητα της ύλης και των στόχων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο με την ουσιαστική χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της.
5. Η ασυμβατότητα ανάμεσα στη διδακτέα ύλη και το διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας.

Είναι προφανές ότι τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα θα εξακολουθήσουν να υφίστανται, και ίσως μάλιστα οξυνθούν, όταν αρχίσει η εφαρμογή των νέων προγραμμάτων σπουδών και διδακτικών βιβλίων. Το γεγονός όμως ότι η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επεκτείνεται στο Γυμνάσιο καθιστά απολύτως αναγκαία κάποια στοιχειώδη συνεργασία μεταξύ των διδασκόντων στις δύο βαθμίδες, η οποία μπορεί να συμβάλει στην άμβλυνση των προβλημάτων (ιδιαίτερα το πρώτο και το πέμπτο στον προηγούμενο κατάλογο). Το συγκεκριμένο ζήτημα συνδέεται επίσης στενά με ορισμένες επισημάνσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών που έχουν ενσωματωθεί στα νέα προγράμματα κάτω από το γενικό τίτλο «Διδακτική Πλαισίωση – Σχεδιασμός Μάθησης» ([2], σ.67832-33 και [3], σ.69384-85):

Το Π.Σ. για τα Μαθηματικά υποστηρίζει τη γνωστική-ατομική και την κοινωνικοπολιτισμική-συμμετοχική προσέγγιση στη μάθηση, αντιμετωπίζοντάς τες ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση. Λαμβάνοντας υπόψη τη συζήτηση και την έρευνα που διεξάγεται διεθνώς αναφορικά με τις αρχές που θα πρέπει να διέπουν ένα σύγχρονο Π.Σ. για τα Μαθηματικά, υιοθετείται η άποψη ότι, σε μια τάξη Μαθηματικών, η μάθηση και η διδασκαλία εξελίσσονται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο. ...

Μια κεντρική διδακτική πρακτική του/της εκπαιδευτικού αφορά την επιλογή και διαχείριση του κατάλληλου μαθηματικού έργου που θα πυροδοτήσει την επιθυμητή μαθηματική δραστηριότητα. Πρόκειται για την εργασία που αναθέτει ο/η εκπαιδευτικός στους/στις μαθητές/-τριες και στα μαθηματικά χαρακτηριστικά της δράσης που αναδεικνύεται στην πορεία εκπόνησής της. Το μαθηματικό έργο συνδέεται άμεσα, αλλά όχι αποκλειστικά, με τις μαθηματικές πρακτικές που θα αναπτύξει ο/η μαθητής/-τρια. Ο/Η εκπαιδευτικός καλείται να μην περιορίζει τις

επιλογές του σε έργα που εστιάζουν στην εφαρμογή αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων, αλλά να επιλέγει έργα που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα ή/και τις εμπειρίες των μαθητών/-τριών, αντλούν προβληματισμούς από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, επιδέχονται διαφορετικές μεθόδους επίλυσης και απαιτούν τεκμηριωμένες επεξηγήσεις και παραδοχές.

Γενικότερα, το ζητούμενο είναι έργα που εμπλέκουν τους/τις μαθητές/-τριες στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού.

Οι προηγούμενες επισημάνσεις φέρνουν για άλλη μια φορά στο προσκήνιο ορισμένες νεότερες αντιλήψεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών που εμφανίζονται ως «αντίδοτο» στις παραδοσιακές δασκαλοκεντρικές και μετωπικές μεθόδους. Οι αντιλήψεις αυτές, παρά το γεγονός ότι έχουν γίνει αντικείμενο ευρείας συζήτησης τις τελευταίες δεκαετίες, δεν έχουν ακόμη γνωρίσει ευρεία αποδοχή και ενσωμάτωση στο χώρο της διδακτικής πράξης. (Για μια βιβλιογραφική επισκόπηση των σχετικών συζητήσεων, προτάσεων και αντιδράσεων βλ. τα [7], [8], [9], [10], [11] και [12]).

Κύριο χαρακτηριστικό των νεότερων αντιλήψεων είναι η προσπάθεια υπέρβασης του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας και μάθησης, όπου κυριαρχεί ο δάσκαλος ως αποκλειστικός φορέας και «πομπός» της γνώσης, την οποία «μεταβιβάζει» προς μαθητές-«δέκτες» που (υποτίθεται ότι) θα αγωνιστούν για την κατακτήσουν. Οι εισηγητές αυτών των αντιλήψεων περιγράφουν ένα νέο πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης, στο οποίο κυριαρχούν όροι όπως «μελέτη μαθήματος», «διδακτική δραστηριότητα», «συνεργατική μάθηση» κ.ά. (βλ. για μια αναλυτική παρουσίαση το [13], ιδιαίτερα τα κεφάλαια 3 και 4). Η «μελέτη μαθήματος» για παράδειγμα χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι ένας εκπαιδευτικός υλοποιεί στην τάξη του ένα μάθημα που έχει προετοιμάσει ο ίδιος σε συνεργασία μια ομάδα εκπαιδευτικών, ενώ οι υπόλοιποι (ενδεχομένως με την καθοδήγηση κάποιου ερευνητή-συντονιστή) παρατηρούν το μάθημα συλλέγοντας και ερμηνεύοντας διάφορα στοιχεία που προκύπτουν κατά τη διδασκαλία. Τα ερωτήματα που απασχολούν την ομάδα των εκπαιδευτικών στη διάρκεια αυτής της διαδικασίας είναι πολλά και μπορούν να περιγραφούν συνοπτικά ως εξής:

1. Τι γνωρίζουν οι μαθητές για την ενότητα που πρόκειται να διδάξουμε;
2. Τι θέλουμε να έχουν κατανοήσει μετά τη διδασκαλία της ενότητας;
3. Ποιες είναι οι ενέργειες (επιλογή δραστηριοτήτων, υπενθύμιση θεωρίας κ.λπ.) που θα τους οδηγήσει από το επίπεδο που βρίσκονται σε αυτό που στοχεύουμε;

4. Τι είναι αυτό που θα κάνει τη συγκεκριμένη ενότητα και κάθε δραστηριότητα του μαθήματος ελκυστική και σημαντική για τους μαθητές;
5. Πώς θα οργανωθεί η διδασκαλία της ενότητας;
6. Πώς αναμένεται να ανταποκριθούν οι μαθητές στις ερωτήσεις και τις δραστηριότητες στο μάθημα; Ποιες δυσκολίες και παρερμηνείες ενδέχεται να προκύψουν και πώς μπορούν να τις αντιμετωπίσουν οι διδάσκοντες;
7. Ποια στοιχεία θα πρέπει να συλλέξουμε και να συζητήσουμε σχετικά με τη μάθηση, τα κίνητρα και τη συμπεριφορά των μαθητών; Με ποιο τρόπο;
8. Πώς θα επεξεργασθούμε τα δεδομένα;

Όπως γίνεται φανερό η προηγούμενη διαδικασία υπερβαίνει την τυπική διεκπεραίωση ενός μαθήματος στη σχολική τάξη και έχει μια ισχυρή επιμορφωτική διάσταση. Ιδιαίτερα σημαντικός στη «μελέτη μαθήματος» είναι ο ρόλος των διδακτικών δραστηριοτήτων που θα ανατεθούν στους μαθητές, η δημιουργία των οποίων στηρίζεται στις ακόλουθες βασικές αρχές:

1. Η οργάνωση μιας δραστηριότητας στην τάξη προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ερωτήματος ή προβλήματος που τίθεται στους μαθητές χωρίς εμφανείς διδακτικές προθέσεις (δηλαδή την «παράδοση» ή «αξιολόγηση» συγκεκριμένων γνώσεων).
2. Στο αρχικό στάδιο η δραστηριότητα έχει ως κύριο στόχο την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών και τη δημιουργία ενός κλίματος έρευνας και συνεργασίας για την ανακάλυψη της λύσης.
3. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εργαστούν σε μικρές ομάδες, να δοκιμάσουν διάφορες μεθόδους απάντησης στο ερώτημα ή επίλυσης του προβλήματος, να διατυπώσουν εικασίες και να υποστηρίξουν με επιχειρήματα τα ευρήματά τους.
4. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διάρκεια της δραστηριότητας είναι διακριτικός και στο μεγαλύτερο μέρος της περιορίζεται στην ενθάρρυνση των μαθητών και την παροχή υποδείξεων. Η κύρια διδακτική παρέμβασή του έχει τη μορφή ανακεφαλαίωσης και διατύπωσης των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την εργασία των μαθητών.
5. Οι δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν στη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς είναι περιορισμένες σε αριθμό και πρέπει να εξυπηρετούν βασικούς στόχους της διδασκαλίας.

Με βάση όλα τα παραπάνω θα αναπτύξουμε στο δεύτερο μέρος της εισήγησης μια σειρά δραστηριοτήτων έχοντας οδηγό την ύλη των νέων προγραμμάτων σπουδών στο θεματικό πεδίο «Γεωμετρία, Μέτρηση και Αναλυτική Γεωμετρία» που αντιστοιχεί

στην Γ΄ Γυμνασίου και την Α΄ Λυκείου. Η παρουσίαση και η συζήτηση θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις αρχές της «μελέτης μαθήματος», με έμφαση στην επιμορφωτική διάσταση και έχοντας κύριο στόχο την αντιμετώπιση των διαχρονικών προβλημάτων της διδασκαλίας της Γεωμετρίας που έχουμε αναφέρει. Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν ζητήματα όπως η διατύπωση των ορισμών και οι ταξινομήσεις των γεωμετρικών σχημάτων, η αποδεικτική διαδικασία, οι γεωμετρικές κατασκευές και η ουσιαστική αξιοποίηση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.



## ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

Οι δραστηριότητες που θα παρουσιάσουμε στο μέρος αυτό ακολουθούν σε γενικές γραμμές τη διάταξη της ύλης στα νέα προγράμματα σπουδών, δίνοντας έμφαση στο γεγονός ότι πρέπει να υπηρετούν το κρίσιμο στάδιο της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και να συνδυάζουν την επανάληψη με την εμπάθυνση.

Ως αφετηρία για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Γ΄ Γυμνασίου προτείνουμε να χρησιμοποιηθούν ορισμένες δραστηριότητες που έχουν στόχο την εξοικείωση των μαθητών με τη διατύπωση ορισμών (που υποτίθεται ότι είναι «γνωστοί» από την Α΄ Γυμνασίου), καθώς και με τη δημιουργία αποδεικτικών συλλογισμών για κάποιες απλές ιδιότητες των βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

### Δραστηριότητες διατύπωσης ορισμών

- Η δομή του νέου προγράμματος σπουδών περιορίζει τη διδασκαλία των ορισμών των βασικών γεωμετρικών σχημάτων στην Α΄ Γυμνασίου (και εν μέρει στη Β΄ Γυμνασίου).
- Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία τη χρήση δραστηριοτήτων επανάληψης και εμπάθυνσης στη διατύπωση ορισμών στην Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου.
- Κύριος στόχος αυτών των δραστηριοτήτων είναι να κατανοηθούν ορισμένα θεμελιώδη χαρακτηριστικά των μαθηματικών ορισμών, όπως είναι η οικονομία (δηλαδή η χρησιμοποίηση του ελάχιστου αριθμού ιδιοτήτων που είναι αναγκαίος για να οριστεί μια έννοια) και η ακρίβεια (δηλαδή ο ορισμός να αποκλείει η σύγχυση της οριζόμενης έννοιας με οποιαδήποτε άλλη).

Το παράδειγμα που θα αναπτύξουμε αφορά τον ορισμό των εννοιών «εφεξής» και «διαδοχικές γωνίες».

### Δραστηριότητες εφαρμογής και αξιολόγησης της αποδεικτικής διαδικασίας:

#### Εμπειρικές αιτιολογήσεις και μαθηματικές αποδείξεις

- Επιλέγεται κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα ενός γεωμετρικού σχήματος και εξετάζονται διάφοροι τρόποι αιτιολόγησης και απόδειξής της.
- Προσδιορίζονται βασικές διαφορές ανάμεσα σε «εμπειρική αιτιολόγηση» και «μαθηματική απόδειξη» της ιδιότητας.

- Προσδιορίζονται βασικά χαρακτηριστικά κάθε απόδειξης (π.χ. χρήση ή όχι βοηθητικών γραμμών).
- Αξιολογούνται από διδακτική και μαθησιακή άποψη τα δομικά στοιχεία κάθε απόδειξης.

Το παράδειγμα που θα αναπτύξουμε αφορά διάφορες αποδείξεις της ισότητας των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου, που προέρχονται από διαφορετικές περιόδους ανάπτυξης της Γεωμετρίας. Στις αποδείξεις αυτές γίνεται φανερή η διάκριση μεταξύ εμπειρικής αιτιολόγησης και αυστηρής απόδειξης και ο ρόλος της εποπτείας του σχήματος σε κάθε περίπτωση.

Η επόμενη ομάδα δραστηριοτήτων προτείνεται να αξιοποιηθεί αμέσως μετά την έναρξη των μαθημάτων στην Α' Λυκείου. Ο στόχος τους είναι η «επανεκκίνηση» των μαθητών με αξιοποίηση γνώσεων όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα, το Θεώρημα Θαλή και η Ομοιότητα που διδάσκονται στο Γυμνάσιο, αλλά οι εφαρμογές τους υπερβαίνουν τα όρια της Γεωμετρίας. Εκτός από την προφανή διαγνωστική αξία αυτών των δραστηριοτήτων, η διεξαγωγή τους είναι επίσης χρήσιμη για τη διδασκαλία άλλων μαθημάτων όπως η Άλγεβρα και η Φυσική.

#### **Δραστηριότητες «επανεκκίνησης» στην Α' Λυκείου**

- Επανάληψη και εμβάθυνση σε βασικές γεωμετρικές έννοιες που είναι «γνωστές» από το Γυμνάσιο.
- Εμβάθυνση στη διατύπωση των ορισμών, τη καταγραφή των ιδιοτήτων και τις ταξινομήσεις βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

Στην πρώτη περίπτωση θα αναπτύξουμε ως παράδειγμα το ακόλουθο γεωμετρικό πρόβλημα:

Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρά 5cm. Να τοποθετήσετε το σημείο  $K$  πάνω στη  $B\Delta$  έτσι ώστε  $BK = 2,8$  cm και το σημείο  $\Lambda$  πάνω στη  $B\Gamma$  έτσι ώστε  $B\Lambda = 2$  cm.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου  $B\Delta$ .

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία  $K\Lambda$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\Delta\Gamma$ .

Το πρόβλημα αυτό επιδέχεται διαφορετικές λύσεις με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, του θεωρήματος Θαλή και βασικών τριγωνομετρικών γνώσεων, ενώ

έχει ενδιαφέρουσες προεκτάσεις για το ρόλο των σχημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και την έννοια του αριθμού στην Άλγεβρα.

Στη δεύτερη περίπτωση θα αναπτύξουμε δύο παραδείγματα.

Το πρώτο παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα εισαγωγικά μαθήματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας και περιλαμβάνει τη σύγκριση διάφορων ορισμών για την έννοια του κύκλου που έχουν χρησιμοποιηθεί από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα.

Το δεύτερο παράδειγμα προτείνεται να χρησιμοποιηθεί κατά τη διδασκαλία της ενότητας «Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία» και περιλαμβάνει μια ανάλυση των βασικών αρχών στις οποίες στηρίζεται η μελέτη των σχημάτων «παραλληλόγραμμο», «ορθογώνιο», «ρόμβος», «τετράγωνο», «τραπέζιο» και «ισοσκελές τραπέζιο» (διατύπωση ορισμών, καταγραφή των ιδιοτήτων, κριτήρια ταξινόμησης).

Στις συγκεκριμένες δραστηριότητες επαναφέρουμε το ζήτημα της οικονομίας και ακρίβειας των γεωμετρικών ορισμών σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, που αναδεικνύει τη σημασία τους για την αποδεικτική διαδικασία αλλά και τη διαδικασία της γενίκευσης στα Μαθηματικά. Στο πλαίσιο αυτό αξιοποιούνται ορισμένες γεωμετρικές προτάσεις οι οποίες παρουσιάζουν μεγάλο διδακτικό ενδιαφέρον, ενώ στο παραδοσιακό μάθημα εμφανίζονται ως εφαρμογές ή ασκήσεις ρουτίνας (βλ. π.χ. το [14]). Μια τέτοια πολύ γνωστή πρόταση, που επιδέχεται σημαντικές προεκτάσεις και γενικεύσεις, είναι η επόμενη (βλ. τα [15] και [16]):

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Να εξετάσετε ποια ιδιότητα πρέπει να έχει το αρχικό τετράπλευρο ώστε το παραλληλόγραμμο αυτό είναι α) ορθογώνιο, β) ρόμβος και γ) τετράγωνο.

**Δραστηριότητες εφαρμογής και αξιολόγησης της αποδεικτικής διαδικασίας:  
Ανάλυση της μεθοδολογίας, των υποθέσεων και της «ποιότητας πληροφορίας»  
των γεωμετρικών αποδείξεων**

Ασφαλώς το κύριο βάρος της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο θα δοθεί στην προσπάθεια εξοικείωσης των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία, που είναι ένας δύσκολος και διδακτικά πολύ απαιτητικός στόχος. Εδώ χρειάζεται να διαθέτουν οι διδάσκοντες μια επαρκή εκτίμηση για το εύρος και το επίπεδο των βασικών προαπαιτούμενων γνώσεων που έχουν αποκτήσει οι μαθητές στο Γυμνάσιο (στο ζήτημα αυτό μπορεί να βοηθήσουν σημαντικά οι προηγηθείσες δραστηριότητες «επανεκκίνησης»).

Στις προτεινόμενες δραστηριότητες χρησιμοποιούμε ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, αλλά η διαπραγμάτευσή τους εκτείνεται σε μεγαλύτερο βάθος. Η έμφαση δεν δίνεται μόνο στην κεντρική ιδέα μιας απόδειξης αλλά στην αποκάλυψη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της αποδεικτικής πορείας, όπως είναι ο ρόλος των υποθέσεων ή των προτάσεων που έχουν ήδη αποδειχθεί. Τα ζητήματα αυτά συνδέονται με την ανάγκη ένταξης της μελέτης των γεωμετρικών σχημάτων στο πλαίσιο μια μαθηματικής θεωρίας και εξυπηρετούν έναν άλλο δύσκολο διδακτικό στόχο: Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι μια συλλογή «ατάκτως ερριμμένων» γεωμετρικών προτάσεων αλλά ένα θεωρητικό μαθηματικό σύστημα που το χαρακτηρίζει η λογική συνέπεια.

Το παράδειγμα που θα αναπτύξουμε στην ενότητα αυτή αφορά την αποδεικτική μεθοδολογία και την αμοιβαία σχέση δύο βασικών θεωρητικών προτάσεων για τις ιδιότητες των γωνιών ενός τριγώνου (σχέση εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας και άθροισμα των εσωτερικών γωνιών). Αρχικά θα γίνει φανερός ο περιορισμένος ρόλος της εποπτείας για τη μελέτη αυτών των ιδιοτήτων και στη συνέχεια θα αναδειχθούν οι υποθέσεις και η μεθοδολογία των αντίστοιχων αποδείξεων και η «ποιότητας πληροφορίας» που μεταφέρουν.

### **Δραστηριότητες πρακτικών και θεωρητικών εφαρμογών της μελέτης των γεωμετρικών σχημάτων**

Το ζήτημα των εφαρμογών των γεωμετρικών προτάσεων έχει πολλές όψεις που δεν προβάλλονται ιδιαίτερα στο παραδοσιακό μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι όψεις αυτές αφορούν τόσο ζητήματα πρακτικών εφαρμογών, όσο και θεωρητικές εφαρμογές στην αναζήτηση και απόδειξη νέων ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων (κλασικό παράδειγμα στην ύλη της Α΄ Λυκείου αποτελούν οι εφαρμογές των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην απόδειξη νέων ιδιοτήτων του τριγώνου). Κεντρική θέση όμως στο συγκεκριμένο ζήτημα κατέχει η χρήση των θεωρητικών προτάσεων στις γεωμετρικές κατασκευές, η διδασκαλία των οποίων είναι εντελώς παραμελημένη τις τελευταίες δεκαετίες και τα νέα προγράμματα σπουδών φιλοδοξούν να την αναβαθμίσουν.

Τα παραδείγματα που θα αναπτύξουμε στην ενότητα αυτή αφορούν αρχικά τις πρακτικές εφαρμογές και περιλαμβάνουν τις εξής δραστηριότητες: Μια ανάλυση των σχημάτων που χρησιμοποιούνται στα σήματα οδικής κυκλοφορίας και μια εφαρμογή των ιδιοτήτων του ορθογωνίου στο τεχνικό πρόβλημα ελέγχου της εγκατάστασης

μιας πόρτας στο άνοιγμα ενός τοίχου. Στη συνέχεια προτείνονται δύο δραστηριότητες εφαρμογής των ιδιοτήτων των σχημάτων σε θεωρητικά ζητήματα, στις οποίες αξιοποιούνται δύο γεωμετρικές ασκήσεις με τρόπο που αναδεικνύει το σπουδαίο ρόλο των βοηθητικών γραμμών στις γεωμετρικές αποδείξεις.

Στο ζήτημα των γεωμετρικών κατασκευών προτείνεται μια δραστηριότητα με αντικείμενο τη σύγκριση της κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μια εναλλακτική μέθοδο που δεν απαιτεί την κατασκευή κύκλων.

### **Ο ρόλος των Τ.Π.Ε. στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας**

Το ζήτημα αυτό, παρά τις πολυάριθμες συζητήσεις, τις θεωρητικές αναλύσεις, την ύπαρξη σημαντικού εκπαιδευτικού υλικού (λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας) και την υλοποίηση πολλών επιμορφωτικών δράσεων, παραμένει ουσιαστικά ανοιχτό και χωρίς ουσιαστική συμβολή στην πολυπόθητη αναβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο κύριος λόγος κατά την άποψή μας είναι ότι οι παραδοσιακοί στόχοι της διδασκαλίας και το αντίστοιχο σχολικό βιβλίο (το οποίο επηρεάζει καταλυτικά τις πρακτικές των διδασκόντων), δεν ευνοούν με κανένα τρόπο την ενσωμάτωση των τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία του μαθήματος.

Για το λόγο αυτό έχουμε συμπεριλάβει στις δραστηριότητες της συγκεκριμένης ενότητας της εισήγησης τη μελέτη δύο κειμένων που εξετάζουν με κριτικό τρόπο τη σχέση Γεωμετρίας – Υπολογιστών και τη χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στη διδασκαλία (βλ. [17] και [18]). Στη συνέχεια αναπτύσσουμε μια δραστηριότητα που αξιοποιεί απλές γεωμετρικές ασκήσεις με τρόπο που ευνοεί αρχικά τη χρήση λογισμικού για διερεύνηση και διατύπωση εικασιών αλλά παράλληλα αναδεικνύει την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας και την αναζήτηση γενικεύσεων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. *Νέα Προγράμματα Σπουδών 2021*. Διαθέσιμα στο δικτυακό τόπο  
<http://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-archiki-selida>
- [2] Υπουργείο Παιδείας. *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α', Β' και Γ' τάξεων Γυμνασίου*. Φ.Ε.Κ. Β' 5260, 12 Νοεμβρίου 2021.
- [3] Υπουργείο Παιδείας. *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α', Β' και Γ' τάξεων Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β' 5390, 19 Νοεμβρίου 2021.
- [4] Γ. Θωμαΐδης, Γ. *Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*.  
Εισήγηση στην 4<sup>η</sup> ημερίδα των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί «Η Γεωμετρία στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Παρελθόν – Παρόν – Μέλλον» (15 Μαρτίου 2014). Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο:  
<http://www.kalamari.gr/el/component/content/article/541-4hmeridamathimatikwn.html>
- [5] Γ. Θωμαΐδης. *Προβλήματα διδασκαλίας και προϋποθέσεις για την αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο*.  
Εισήγηση στην ημερίδα της Περιφερειακής Διεύθυνσης Εκπαίδευσης Αττικής «Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση» (2 Απριλίου 2022). Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο  
<https://www.youtube.com/watch?v=qAOgYzje19A>
- [6] Α. Μάγκος: *Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων 60 ετών*. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, 2021. Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο  
<https://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/644/recent-submissions?offset=20>
- [7] Ε. Κολέζα. Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 14<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.71–81. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Μυτιλήνη, 14–16 Νοεμβρίου 1997.
- [8] Υπουργείο Παιδείας. *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β' 1342, 30 Ιουνίου 1999.

- [9] Π. Οικονόμου. Στάσεις, Αντιλήψεις και Πρακτικές των Διδασκόντων. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιωργάκος [Επιμ.] *Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών*, σσ.49–79. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2000.
- [10] Σ. Φερεντίνος & Χ. Καλλιγιάς. Διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια δραστηριοτήτων. Στο Μ. Τζεκάκη [Επιμ.] *Πρακτικά 5<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*, σσ.188–193, Θεσσαλονίκη, 12–14 Οκτωβρίου 2001.
- [11] Υπουργείο Παιδείας. *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου*. Φ.Ε.Κ. Β' 303 & 304, 13 Μαρτίου 2003.
- [12] Ε. Δημητριάδου, Γ. Θωμαΐδης, Π. Οικονόμου & Μ. Σταφυλίδου. *Η εισαγωγή των νέων βιβλίων Μαθηματικών στο Γυμνάσιο από την οπτική των εκπαιδευτικών που τα δίδαξαν το σχολικό έτος 2007-2008*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζυγός, 2009.
- [13] Ε. Κολέζα. *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Τόπος, 2009.
- [14] M. de Villiers. The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics* 14(1), pp.11–18, 1994.
- [15] P. Oliver. Pierre Varignon and the parallelogram theorem, *Mathematics Teacher* 94(4), pp.316–319, 2001.
- [16] P. Oliver. Consequences of the Varignon parallelogram theorem, *Mathematics Teacher* 94(5), pp.406–408, 2001.
- [17] I. F. Sharygin & N. I. Protasov. Χρειάζεται το σχολείο του 21<sup>ου</sup> αιώνα τη Γεωμετρία; Περιοδικό *Το φ*, τεύχος 7, σσ.58–72, 2011.
- [18] Χ. Λεμονίδης & Χ. Αποστόλου. Συμπεριφορές μαθητών Γ' Γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα Geogebra. Περιοδικό *Ευκλείδης Γ'* τεύχος 74, σσ.179–195, 2011.