Οι επιδόσεις των υποψηφίων σε «πρωτότυπα» ή «παραπλανητικά» ερωτήματα των πανελλαδικών εξετάσεων

Γιάννης Θωμαΐδης
Δρ. Μαθηματικών
τ. Σχολικός Σύμβουλος

Δημήτρης Μπαρούτης
Καθηγητής Μαθηματικών
3ο ΓΕ.Λ. Σταυρούπολης

Κείμενο εισήγησης στην Ημερίδα «Τα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου και οι Πανελλαδικές Εξετάσεις» του Παραρτήματος Μαγνησίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας
Πέμπτη 23 Φεβρουαρίου 2023

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα διαχρονικό φαινόμενο της θεματοδοσίας των πανελλαδικών εξετάσεων στα Μαθηματικά (ιδιαίτερα μετά από χρονιές που καταγράφονται υψηλά ποσοστά αριστούχων) είναι η επιλογή ορισμένων ερωτημάτων με αποκλειστικό κριτήριο τη διάκριση των πολύ ικανών υποψηφίων. Αυτά τα ερωτήματα, ανάλογα με την οπτική γωνία από την οποία εξετάζονται, χαρακτηρίζονται συνήθως ως «πρωτότυπα» ή «παραπλανητικά».

Στην εισήγηση θα παρουσιάσουμε δεδομένα από την αξιολόγηση των γραπτών στα Βαθμολογικά Κέντρα για να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν αυτά τα ερωτήματα οι υποψήφιοι και την επίδραση που έχουν στις επιδόσεις τους.

Εισαγωγή

Στη δημόσια συζήτηση που διεξάγεται κάθε χρόνο για τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων ακούγονται συχνά χαρακτηρισμοί όπως «πρωτότυπα» ή «παραπλανητικά ερωτήματα». Η ουσία του ζητήματος βρίσκεται βέβαια στο σκοπό που εξυπηρετούν οι συγκεκριμένες εξετάσεις, ο οποίος επιβάλει να υπάρχουν ορισμένα ερωτήματα που θα πετύχουν τη λεπτή διάκριση και κατάταξη των υποψηφίων (ιδιαίτερα στις υψηλές βαθμολογικές κλάσεις). Η σχετική συζήτηση όμως παρεκτρέπεται συχνά σε πρόωρες ή αβάσιμες εκτιμήσεις για τη δυσκολία των ερωτημάτων αυτού του είδους και την επίδραση που έχουν στην επίδοση των υποψηφίων.

Αυτό το φαινόμενο είχε λάβει αρκετές φορές στο παρελθόν ακραίες διαστάσεις, με τη δημιουργία θεμάτων που είχαν ψευδείς υποθέσεις ή εξεζητημένων θεμάτων που ακροβατούσαν στα όρια της διδακτέας/εξεταστέας ύλης ή ακόμη και λανθασμένων ερωτημάτων που προκάλεσαν γενικότερη αναταραχή.[1]

Στην παρούσα εισήγηση θα ασχοληθούμε με την ανάλυση κάποιων ερωτημάτων που τέθηκαν στις πανελλαδικές εξετάσεις των τελευταίων ετών και θα επιχειρήσουμε να ελέγξουμε, χρησιμοποιώντας στοιχεία από τις αντίστοιχες επιδόσεις των υποψηφίων στα Βαθμολογικά Κέντρα, την εγκυρότητα ορισμένων σχολίων που διατυπώθηκαν στη σχετική δημόσια συζήτηση. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παραδείγματα ερωτήματα από τις πρόσφατες εξετάσεις των ετών 2022, 2021, 2017 και ως μέτρο σύγκρισης ένα ερώτημα από τις εξετάσεις του 2008. Υπάρχουν φυσικά πολύ περισσότερα παραδείγματα αλλά η επιλογή των συγκεκριμένων έγινε με κριτήριο την τρέχουσα εξεταστέα ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων ώστε να είναι δυνατή η παρακολούθησή τους από μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

[1] Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να εμβαθύνει στη μελέτη του ζητήματος των «πρωτότυπων» ή «παραπλανητικών» θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων, θα βρει πολλά παραδείγματα και λεπτομέρειες στην εργασία [1] και το βιβλίο [2] των βιβλιογραφικών παραπομπών που γίνονται στο τέλος της εργασίας.

1. «Πρωτότυπα» ή «παραπλανητικά» ερωτήματα στο θέμα Δ των πανελλαδικών εξετάσεων του 2022

Για όσους ασχολούνται συστηματικά με τις πανελλαδικές εξετάσεις, η εμφάνιση ενός «πρωτότυπου» ή «παραπλανητικού» ερωτήματος το 2022 ήταν πολύ πιθανή, επειδή το προηγούμενο έτος είχε καταγραφεί μια υπέρμετρη αύξηση του ποσοστού των άριστων γραπτών στα Μαθηματικά (δηλαδή γραπτών που βαθμολογήθηκαν στη κλάση [18–20]). Ήταν λοιπόν αναμενόμενη κάποια «αντίδραση» της επιτροπής θεματοδοτών για περιορισμό του φαινομένου.

Τα πρώτα χρόνια μετά την αντικατάσταση του συστήματος των Κατευθύνσεων από το σύστημα των Ομάδων Προσανατολισμού το 2016 και τις αλλαγές στο σύστημα των εξετάσεων (π.χ. εξαίρεση των υποψηφίων των Επιστημών Υγείας από την εξέταση στα Μαθηματικά και διαφορετική «φιλοσοφία» επιλογής των θεμάτων), είχε καταγραφεί μεγάλη πτώση του ποσοστού των άριστων γραπτών. Αυτή την πτώση ακολούθησε όμως μία διαδοχική, μεγάλη αύξηση την τριετία 2019-2021, όπως γίνεται φανερό από τον επόμενο πίνακα (τα στοιχεία προέρχονται από τις ετήσιες, επίσημες ανακοινώσεις του Υπουργείου Παιδείας):

Έτος	Προσανατολισμός	Υποψήφιοι	Βαθμολογική κλάση			
			[0 – 10)		[18 – 20]	
2019	ΘΕΤΙΚΟΣ	21521	46,59%	10027	9,74%	2097
	ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ	24031	73,96%	17731	1,58%	380
2020	ΘΕΤΙΚΟΣ	15171	33,13%	5027	14,41%	2187
	ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ	23269	75,6%	17590	1,73%	404
2021	ΘΕΤΙΚΟΣ	14654	31,8%	4660	19,01%	2786
	ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ	24196	72,76%	17606	2,66%	644
2022	ΘΕΤΙΚΟΣ	14165	34,99%	4957	11,88%	1683
	ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ	24871	73,56%	18296	1,51%	375

Όπως είναι φανερό από τα στοιχεία του πίνακα, την τριετία 2019-2021 το ποσοστό των άριστων γραπτών της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών αυξήθηκε από το 9,84% στο 19,01% (δηλαδή σχεδόν διπλασιάστηκε), ενώ με το 2022 επανήλθε σε «φυσιολογικά» επίπεδα (11,88%).

Βασικό ρόλο σε αυτή τη μείωση είχε στο θέμα Δ, επειδή σε αυτό εμφανίστηκαν κάποια ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως «παραπλανητικά» ή και «πρωτότυπα».

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2022, Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με

$x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2) Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x′x, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\left(x_1 + x_2 - 2\right)$$ Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f\left(2 - x_1\right) < 0$ Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right)$ έχει λύση.

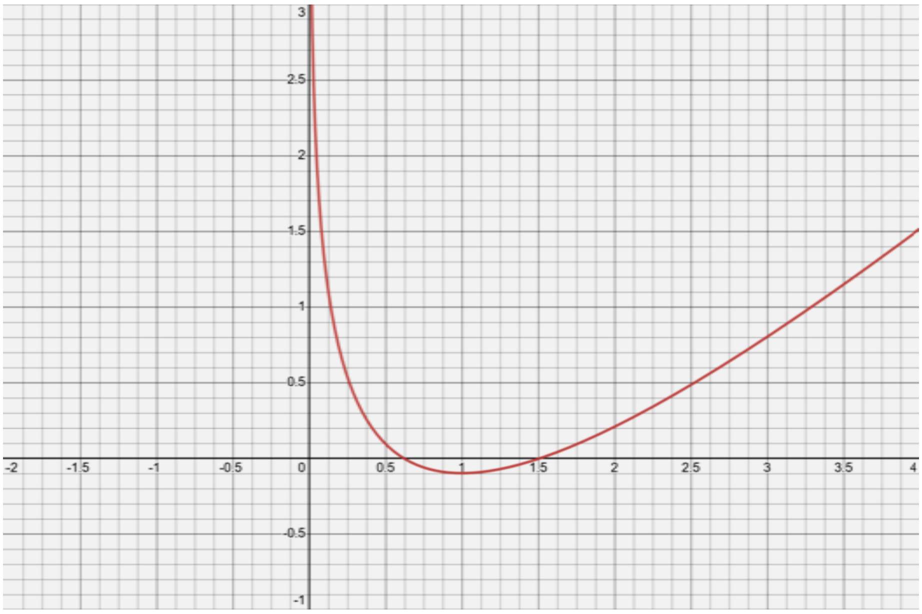
Μονάδες 6

Στο θέμα αυτό το 80% των υποψηφίων έλαβε λιγότερες από 12,5 μονάδες (δηλαδή τη βάση) ενώ γύρω στο 60% δεν απάντησε σε κανένα ερώτημα πλήρως. Από την άλλη μεριά, οι υποψήφιοι που ανήκουν στην υψηλότερη βαθμολογική κλάση [20–25] ήταν λίγο πάνω από 5%. [2]

Ο τρόπος δημιουργίας του προηγούμενου θέματος και η αλληλουχία των διαδοχικών ερωτημάτων γίνεται φανερός αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (η οποία φυσικά δεν ήταν ζητούμενη στις εξετάσεις).

[2] Τα συγκεκριμένα στατιστικά στοιχεία προέρχονται από δύο Βαθμολογικά Κέντρα της Θεσσαλονίκης και ένα Βαθμολογικό Κέντρο της Αθήνας, στα οποία αξιολογήθηκαν συνολικά 3373 γραπτά.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = x – ln(3x) στο θέμα Δ/2022



Το ερώτημα Δ1 για την ύπαρξη των ριζών και την κυρτότητα δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία και είναι βασικό για τη συνέχεια. Επισημαίνουμε όμως την ασυνήθιστη έκφραση του εμβαδού του καμπυλόγραμμου χωρίου στο ερώτημα Δ2, στη μορφή του εμβαδού ενός ισοδύναμου τριγώνου με ίδια βάση ($x_2 – x_1$) και ύψος ($x_1 + x_2 – 2$). Από τη σχέση αυτή, επειδή είναι $x_2 – x_1 > 0$, συνάγεται άμεσα ότι ισχύει

$$x_1 + x_2 – 2 > 0 \Leftrightarrow 2 – x_1 < x_2$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι είναι $x_1 < 1$ συμπεραίνουμε ότι $1 < 2 – x_1 < x_2$ και άρα ισχύει η ζητούμενη ανισότητα $f(2 – x_1) < 0$ στο ερώτημα Δ3.

Η ουσιαστική μαθηματική σημασία του ερωτήματος Δ4 αφορά την απόδειξη (και ίσως την αναζήτηση κάποιας γεωμετρικής ερμηνείας) της ανισότητας

$$2f(x) \geq f(1) + f\,'(x_2)(x – x_2),$$

με συνδυασμό των πληροφοριών ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1. Είναι προφανές ότι η «μετάλλαξη» αυτής της ανισότητας σε «αδύνατη εξίσωση» στο ερώτημα Δ4 εξυπηρετούσε αποκλειστικά τις εξεταστικές σκοπιμότητες (μόνο το 4% των υποψηφίων έλαβε τις 5 μονάδες του ερωτήματος). Στη δημόσια συζήτηση που ακολούθησε μετά τις εξετάσεις, αρκετοί έμπειροι εκπαιδευτικοί και συγγραφείς χαρακτήρισαν τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 ως «πρωτότυπα».

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι σε πολλά γραπτά (ορισμένα πολύ ικανών υποψηφίων) δόθηκε μια διαφορετική λύση του ερωτήματος Δ4. Στη λύση αυτή είναι εμφανής η προσπάθεια εφαρμογής μιας μεθοδολογίας που αποδεικνύει με διάκριση περιπτώσεων για τη θέση του x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και απαγωγή σε άτοπο, ότι η συγκεκριμένη εξίσωση είναι αδύνατη. Η εξίσωση μετασχηματίζεται έτσι ώστε να εμφανιστούν οι λόγοι μεταβολής της συνάρτησης και της παραγώγου της σε συγκεκριμένα διαστήματα. Με διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής οι λόγοι αυτοί εξισώνονται με τιμές της πρώτης και δεύτερης παραγώγου οι οποίες έχουν γνωστό πρόσημο από τη μελέτη της μονοτονίας και της κυρτότητας στο Δ1.[3]

Οι υποψήφιοι που απάντησαν ορθά στο ερώτημα Δ4 με αυτό τον τρόπο αφιέρωσαν υπερβολικό χρόνο (όπως θα δείξουμε στην παρουσίαση, σε ορισμένα γραπτά η λύση με το συγκεκριμένο τρόπο ήταν πλήρης αλλά κάλυπτε 4 πυκνογραμμένες σελίδες!). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι για τους συγκεκριμένους τουλάχιστον υποψήφιους, τα υπόλοιπα θέματα ήταν πολύ εύκολα.

Η μετατροπή του ζητούμενου, από απόδειξη μιας ανισότητας σε απόδειξη ότι η αντίστοιχη εξίσωση είναι αδύνατη θα μπορούσε ενδεχομένως να χαρακτηριστεί ως «παραπλανητικό» ερώτημα, αλλά αυτή δεν επηρέασε τελικά τη μεγάλη πλειοψηφία των υποψηφίων (οι περισσότεροι των οποίων ασχολήθηκαν καθόλου ή ελάχιστα με το ερώτημα Δ4. Λειτούργησε όμως αρνητικά σε όσους αντιμετώπισαν το Δ4 όχι ως απόδειξη μιας ανισότητας, αλλά με αλλεπάλληλες εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν τη μελέτη όλων των περιπτώσεων.

[3] Η συγκεκριμένη μεθοδολογία είναι γνωστή και χρησιμοποιείται για την επίλυση παρόμοιων εξισώσεων στα σχετικά βοηθήματα (βλ. π.χ. στο [3], σ.110).

2. Μια αντίστοιχη περίπτωση στο θέμα Δ των πανελλαδικών εξετάσεων του 2017.

Η επίλυση μιας εξίσωσης παρόμοιας με αυτή του ερωτήματος Δ4/2022 (όχι φυσικά αδύνατης), που συνδέονταν με τη γνώση του ολικού μέγιστου μιας συνάρτησης είχε ζητηθεί στο ερώτημα Δ4 των πανελλαδικών εξετάσεων του 2017.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017, Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,\ 0) \\ e^x ημx, & x\in[0,\ π] \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, π]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα y′y και την ευθεία $x = π$. Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3π}{4}}f(x)-e^{-\frac{3π}{4}}(4x-3π)^2=8\sqrt{2}$ Μονάδες 8

Από τα 1821 γραπτά που αξιολογήθηκαν το 2017 στο Βαθμολογικό Κέντρο της Δυτικής Θεσσαλονίκης μόνο 32 (ποσοστό 1,76%) έλαβαν το σύνολο των 8 μονάδων του ερωτήματος Δ4! [4]

Χαρακτηριστικός είναι ο τρόπος που σχολίασαν την επίδοση των υποψηφίων στο συγκεκριμένο ερώτημα οι συντονιστές του Βαθμολογικού Κέντρου (βλ [4], σ.684):

> Η εξίσωση είναι κατασκευασμένη με βάση τα ευρεθέντα στο ερώτημα Δ2 και με κατάλληλη επεξεργασία μετατρέπεται σε μια εξίσωση με προφανή ρίζα ενώ οι άλλες ρίζες αποκλείονται με βάση τα ακρότατα.
>
> Η μετατροπή δεν είναι αρκετά δύσκολη αλλά η δικαιολόγηση της μοναδικότητας απαιτεί γνώση και προσοχή …
>
> Εντύπωση κάνει το γεγονός ότι <u>το 83% των μαθητών δεν δοκίμασαν να βρούνε ούτε κάποια προφανή ρίζα</u>.
>
> Επίσης πρέπει να τονισθεί ότι πολλοί μαθητές δεν έκαναν τον κόπο να δούνε τα προηγούμενα ερωτήματα του θέματος και να τα συνδέσουν μεταξύ των.

[4] Το 2017, το ποσοστό των άριστων γραπτών της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών ήταν μόλις 4,39%.

Έτσι παρατηρήθηκε το φαινόμενο να θεωρούν στο Δ4 νέα συνάρτηση και να μελετούν εξ αρχής μονοτονία και ακρότατα, με συνέπεια να χάνουν πολύτιμο χρόνο.

Αυτή τη μονολιθικότητα στον τρόπο σκέψης των μαθητών τη συναντάμε και μέσα στις τάξεις και πρέπει να την προσέξουμε.

Μία διαφορετική άποψη για το ερώτημα Δ4 διατυπώθηκε από έναν εκπρόσωπο του φροντιστηριακού χώρου (βλ. [5], σ.120):

Το θέμα Δ4 θύμιζε περισσότερο «σπαζοκεφαλιά». Είναι μια εξίσωση που λύνεται με ιδιαίτερο τρόπο χρησιμοποιώντας το ακρότατο της συνάρτησης. Γνωστό θέμα στη βιβλιογραφία και παρόμοιας λογικής θέματα συναντούμε σε διαγωνισμούς μαθηματικών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι ασκήσεις αυτού του είδους («επίλυση μεικτών εξισώσεων») ήταν πολύ συνηθισμένες την περίοδο του συστήματος των Δεσμών, ιδιαίτερα στο εισαγωγικό κεφάλαιο μελέτης των πραγματικών συναρτήσεων με αλγεβρικά εργαλεία. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εξίσωση

$$5^x + 5^{-x} = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{3}\right),$$

που προκύπτει από την ισότητα μιας εκθετικής με μια τριγωνομετρική συνάρτηση και δημοσιεύτηκε στο [6] (σ.53). Το πρώτο μέλος είναι πάντοτε ≥ 2, το δεύτερο μέλος πάντοτε ≤ 2, ενώ η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Σημειώνουμε επίσης ότι και το 2017 παρατηρήθηκε το φαινόμενο (κυρίως σε γραπτά πολύ ικανών υποψηφίων) να δοθούν μακροσκελείς απαντήσεις με την ίδια ακριβώς μέθοδο που περιγράψαμε για το ερώτημα Δ4 των εξετάσεων του 2022.

Συμπερασματικά μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ερωτήματα όπως το Δ4 των εξετάσεων του 2017 δεν είναι ούτε «πρωτότυπα» ούτε «παραπλανητικά», όταν βέβαια το ζητούμενο διατυπώνεται ως «επίλυση εξίσωσης».

Τα ερωτήματα που λειτούργησαν «παραπλανητικά» στις εξετάσεις του 2017 ήταν μάλλον τα Δ1, Δ2 στα οποία απαιτήθηκε η παραγώγιση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4},\ x \in [-1,\ 0).$$

Η μεγάλη πλειοψηφία των υποψηφίων που ασχολήθηκε με το θέμα έγραψε

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$$

αντί του ορθού $\sqrt[3]{x^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = (-x)^{\frac{4}{3}}$, αποκαλύπτοντας τη μεγάλη δυσκολία κατανόησης και ορθής εφαρμογής μιας βασικής μαθηματικής έννοιας που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου («δύναμη με ρητό εκθέτη»).

3. Μια ιδιαίτερη περίπτωση στο θέμα Γ των πανελλαδικών εξετάσεων του 2021.

Στις εξετάσεις του 2021 η διατύπωση του ερωτήματος Γ2 έγινε από τους θεματοδότες με τέτοιο τρόπο που μπορεί εύλογα να θεωρηθεί ότι είχε στόχο την παραπλάνηση μιας μεγάλης κατηγορίας υποψηφίων. Εκείνων, που ενώ έχουν βασικές παρανοήσεις για τη σημασία των υπαρξιακών θεωρημάτων της Ανάλυσης, χρησιμοποιούν αναλυτικές μεθόδους ακόμη και στην επίλυση απλών αλγεβρικών ασκήσεων. Αυτό το φαινόμενο, που έχει λάβει μεγάλες διαστάσεις τα τελευταία χρόνια, είναι άμεση συνέπεια του δραστικού περιορισμού της διδακτέας και εξεταστέας ύλης της Γ΄ Λυκείου σε ένα μικρό τμήμα τεχνικών της Ανάλυσης, και τον προσανατολισμό της διδασκαλίας στην «ασκησιολογία» των πανελλαδικών εξετάσεων. Το πρόβλημα είχε επισημανθεί ήδη από το 2013 σε μια ενδιαφέρουσα συζήτηση που πραγματοποιήθηκε στον ιστότοπο mathematica.gr (βλ. [7]).

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2021, Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \text{συν}x & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \alpha < -3.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3). Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τος προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x′x. Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \ge -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Μονάδες 7

Για την επίδοση των υποψηφίων στο συγκεκριμένο θέμα επισημαίνουμε τα εξής:[5]
Ποσοστό μεγαλύτερο του 70% έλαβε λιγότερες από 12,5 μονάδες (δηλαδή τη βάση) ενώ το ποσοστό αυτών που βαθμολογήθηκαν στην κλάση [0, 5] αγγίζει το 45%.
Στην επίδοση ανά ερώτημα, η πλήρης αποτυχία (0 μονάδες) σε ένα τουλάχιστον από τα τέσσερα ερωτήματα αγγίζει το 50% ενώ αν θεωρήσουμε ως πλήρη αποτυχία και τη (συνήθως χαριστική) 1 μονάδα, τότε το ποσοστό αυτό αγγίζει το 60%.
Στο άλλο άκρο του βαθμολογικού φάσματος, το ποσοστό των υποψηφίων που βαθμολογήθηκαν στην κλάση [21, 25] για τη συνολική επίδοση στο θέμα Γ ανέρχεται στο 16,6%, ενώ το ποσοστό αυτών που έλαβε το σύνολο των μονάδων σε ένα τουλάχιστον ερώτημα αγγίζει το 20%.
Ειδικά για το ερώτημα Γ2 με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, το 48,9% των υποψηφίων βαθμολογήθηκε με 0 ή 1 μονάδες και το 20,2% με 5 ή 6 μονάδες.
Παρατηρώντας τη διατύπωση του ερωτήματος Γ2 δεν είναι εύκολο να διακρίνουμε κάποιο στοιχείο που δικαιολογεί το χαρακτηρισμό «πρωτότυπο» ή «παραπλανητικό».
Ζητείται ο έλεγχος των υποθέσεων του θεωρήματος Rolle στη δοθείσα συνάρτηση (που έχει ήδη μελετηθεί στο ερώτημα Γ1) και στη συνέχεια η εύρεση της μοναδικής ρίζας της εξίσωσης $f'(x) = 0$, η οποία στο δεδομένο διάστημα ταυτίζεται με την εξίσωση ημx = 0.
Προς μεγάλη έκπληξη αυτών που αξιολόγησαν το συγκεκριμένο ερώτημα στα Βαθμολογικά Κέντρα, η μεγάλη πλειοψηφία των υποψηφίων δεν το κατανόησε με παρόμοιο τρόπο. Σε πάρα πολλούς φαίνεται ότι προκάλεσε «γνωστική σύγκρουση» το γεγονός ότι ενώ στο Γ2(i) αποδεικνύεται εύκολα ότι δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, στο Γ2(ii) ζητείται η εύρεση του σημείου που μηδενίζει την πρώτη παράγωγο.[6] Αυτό το γεγονός είχε δύο συνέπειες:
Μία κατηγορία υποψηφίων προσδιόρισε ένα κλειστό υποδιάστημα του δοθέντος διαστήματος, στο οποίο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle και συμπέρανε έτσι την <u>ύπαρξη</u> (αλλά όχι <u>εύρεση</u> όπως ζητούσε η διατύπωση) μιας ρίζας της πρώτης παραγώγου στο αντίστοιχο ανοικτό υποδιάστημα.
Μια άλλη κατηγορία, στην οποία ανήκουν και ορισμένα σχεδόν άριστα γραπτά, μελέτησε το σύνολο τιμών της παραγώγου $f'(x) = -$ημx σε κάθε ένα από τα τρία

[5] Τα στατιστικά στοιχεία προέρχονται από δύο Βαθμολογικά Κέντρα της Θεσσαλονίκης, στα οποία αξιολογήθηκαν 2387 γραπτά.
[6] Σε όσους έχουν διδάξει στην Γ΄ Λυκείου αποτελεί κοινό τόπο η επόμενη διαπίστωση (που έχει επίσης επαληθευτεί από πολλές έρευνες): Οι περισσότεροι μαθητές είναι απολύτως βέβαιοι ότι αν <u>δεν ισχύουν</u> οι υποθέσεις ενός θεωρήματος, τότε <u>δεν ισχύει</u> ούτε το συμπέρασμά του.

υποδιαστήματα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ και $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ του πεδίου ορισμού της και βρήκε ότι στο δεύτερο από αυτά ανήκει το 0. Έτσι (κάνοντας και χρήση της αντίστοιχης μονοτονίας) συμπέρανε την ύπαρξη (αλλά όχι εύρεση όπως ζητούσε η διατύπωση) της μοναδικής ρίζας της παραγώγου.

Όπως θα δείξουμε στην παρουσίαση, η έκθεση της προηγούμενης διαδικασίας σε ορισμένα γραπτά ήταν τόσο άψογη και λεπτομερής που κάλυψε έκταση δύο σελίδων!

Η αντιμετώπιση αυτή του ερωτήματος Γ2 από μεγάλο αριθμό υποψηφίων εγείρει πολλά σημαντικά ζητήματα. Αυτά αφορούν αρχικά τη αξιολόγηση των γραπτών στα Βαθμολογικά Κέντρα και τα προβλήματα που δημιουργούνται από τη διαφορετική στάση που υιοθετούν μερικές φορές οι δύο βαθμολογητές ενός γραπτού όταν αξιολογούν παρόμοιες απαντήσεις. Λαμβάνοντας όμως υπόψη ότι αυτό που έκαναν οι συγκεκριμένοι υποψήφιοι ήταν ουσιαστικά η «υπαρξιακή επίλυση» μιας απλής τριγωνομετρικής εξίσωσης, το ζήτημα συνδέεται περισσότερο με τις αρνητικές επιπτώσεις που έχει η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου. Οι επιπτώσεις αυτές αφορούν κυρίως με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών στα Μαθηματικά, αλλά εκτείνονται και πέραν αυτών (στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί π.χ. να επικαλεστεί κανείς ακόμη και τη δημιουργία παρανοήσεων σχετικά την ακριβή σημασία των λέξεων «εύρεση» και «ύπαρξη»!).

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι δεν υπάρχει κανένα αντικειμενικό επιχείρημα που αιτιολογεί χαρακτηρισμούς περί «δυσκολίας» ή «παραπλάνησης» των υποψηφίων στο ερώτημα Γ2 των εξετάσεων του 2021. Το ερώτημα αυτό αξιολογούσε, με σχεδόν τετριμμένο τρόπο, την ικανότητα εφαρμογής ενός βασικού θεωρήματος της Ανάλυσης και επίλυσης μιας απλής τριγωνομετρικής εξίσωσης.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συγκεκριμένη διατύπωση του ερωτήματος συνέβαλε καθοριστικά στη λεπτή διάκριση των υποψηφίων που έχουν κατανοήσει την έννοια «θεώρημα» και δεν συγχέουν τις τεχνικές της Άλγεβρας με εκείνες της Ανάλυσης, στέλνοντας παράλληλα πολλά μηνύματα προς στο χώρο της διδασκαλίας των Μαθηματικών (ενδοσχολικής και εξωσχολικής).

4. Μια ιδιαίτερη περίπτωση «παραπλάνησης» στο 4ο θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων του 2008.

Στο τέταρτο και τελευταίο μέρος της εισήγησης θα παρουσιάσουμε ένα θέμα που τέθηκε στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2008, δηλαδή την περίοδο εφαρμογής του συστήματος των Κατευθύνσεων. Το θέμα αυτό προκάλεσε πολλές συζητήσεις στις οποίες κυριαρχούσαν οι λέξεις «παραπλάνηση» και «παγίδα».

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2008, Θέμα 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1 – 1 Μονάδες 3

Το ερώτημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι το 4(β), στο οποίο ζητήθηκε η απόδειξη μιας παραλλαγής του ορισμού της δεύτερης παραγώγου. Στο ερώτημα αυτό καταγράφηκε ένα απροσδόκητα μεγάλο ποσοστό αποτυχίας, όπως δείχνει ο επόμενος πίνακας της επίδοσης των υποψηφίων σε ένα τυχαίο δείγμα 1000 γραπτών που αξιολογήθηκαν στο 53ο Βαθμολογικό Κέντρο Δυτικής Θεσσαλονίκης:

Μονάδες	Γραπτά	Ποσοστό
0	742	74%
1	151	15%
2	35	3,5%
3	15	1,5%
4	57	6%

Η μεγάλη αυτή αποτυχία γίνεται ακόμη πιο εντυπωσιακή αν λάβουμε υπόψη ότι τα ερώτημα 4(β) αποτελεί μικρή παραλλαγή της επόμενης άσκησης του σχολικού βιβλίου (§2.1, άσκηση 8(ii) Β΄ Ομάδας):

Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}=-f'(x_o)$$

Στο τεύχος με τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου η ζητούμενη σχέση προκύπτει από τον ορισμό της πρώτης παραγώγου μέσω μιας αλλαγής μεταβλητής (παρόμοια ήταν και η απόδειξη του ερωτήματος 4(β) που δόθηκε από την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων στις ενδεικτικές απαντήσεις των θεμάτων).

Αν συγκρίνουμε το ερώτημα 4(β) με την άσκηση του σχολικού βιβλίου διαπιστώνουμε ορισμένες επουσιώδεις αλλαγές που αφορούν το συμβολισμό της συνάρτησης, την τάξη της παραγώγου και την εξαφάνιση του αρνητικού προσήμου από το δεύτερο μέλος, αλλά και μια ουσιώδη παρέμβαση που υπήρξε η αιτία της μαζικής αποτυχίας: Την αντικατάσταση του γράμματος x_o της σχολικής άσκησης (παράμετρος σε ρόλο σταθεράς) από το γράμμα x.

Οι υποψήφιοι που ασχολήθηκαν με το ερώτημα αυτό έδωσαν μια μεγάλη ποικιλία απαντήσεων, στις περισσότερες όμως από τις οποίες η σταθερά x χρησιμοποιήθηκε ως μεταβλητή.

Πάρα πολλοί επιχείρησαν να μετασχηματίσουν τον ορισμό της δεύτερης παραγώγου

$$g''(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{g'(x)-g'(x_o)}{x-x_o} \qquad (1)$$

στη ζητούμενη σχέση γράφοντας

$$g''(x)=\lim_{x\to x_o}\frac{g'(x)-g'(x_o)}{x-x_o}\ \underset{x\to x_o\Rightarrow h\to o}{\overset{h=x-x_o}{\Longrightarrow}}$$

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Αυτό όμως που έκαναν, με αυθαίρετη χρήση του γράμματος x (ως μεταβλητής και σταθεράς ταυτόχρονα), ήταν ουσιαστικά ο κλασικός μετασχηματισμός του ορισμού της δεύτερης παραγώγου στη μορφή

$$g''(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x_o+h)-g'(x_o)}{h}.$$

Κάποιοι άλλοι επιχείρησαν να μετασχηματίζουν τη ζητούμενη σχέση

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

στον ορισμό της δεύτερης παραγώγου, θεωρώντας τη σταθερά x ως μεταβλητή και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $x = x_o + h$. Αυτό είχε όμως ως αποτέλεσμα να καταλήξουν στη λανθασμένη ισότητα

$$g''(x)=\lim_{x\to x_o}\frac{g'(x)-g'(x_o)}{x-x_o}=g''(x_o).$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι μια «απόδειξη», η οποία αναρτήθηκε τη μέρα των εξετάσεων στον ιστότοπο φροντιστηριακού συγκροτήματος, στηρίζεται στο ίδιο ακριβώς λάθος. [7]

Η προηγούμενη ιδέα μπορεί όμως να εφαρμοστεί για να διατυπωθεί μια ορθή απόδειξη με τον ακόλουθο τρόπο (η παράμετρος x διατηρεί τον αρχικό της ρόλο ως σταθερά):

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\\&\lim_{h\to 0}\frac{g'(x-h)-g'(x)}{-h}\overset{x-h=u}{=}\\&\lim_{u\to x}\frac{g'(u)-g'(x)}{u-x}=g''(x)\end{aligned}$$

Στην ίδια ουσιαστικά ιδέα στηρίζεται και η επόμενη απόδειξη, την οποία παρουσιάζουμε <u>όπως ακριβώς</u> δόθηκε στο γραπτό ενός υποψηφίου:

$$g''\left(x_o\right)=\lim_{x\to x_o}\frac{g'(x)-g'\left(x_o\right)}{x-x_o}\qquad \text{Θέτω } u=-x$$

$$=\lim_{u\to -x_o}\frac{g'(-u)-g'(x_o)}{-u-x_o}\qquad \text{Θέτω } h=u+x_o \;\Rightarrow\; -u=x_o-h$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x_o-h)-g'(x_o)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x_o)-g'(x_o-h)}{h}$$

Επειδή το x_o είναι τυχαίο, θα ισχύει $g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι ο τυπικός ορισμός της δεύτερης παραγώγου στο σημείο x_o μετασχηματίζεται στην αποδεικτέα σχέση μέσω δύο διαδοχικών αλλαγών μεταβλητής (από το x στο u και από το u στο h). Επισημαίνουμε ιδιαίτερα τη διατήρηση της παραμέτρου x_o σε ρόλο μίας τυχαίας σταθεράς, η οποία στο τέλος μπορεί φυσικά να παρασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Ο υποψήφιος θα μπορούσε να αποφύγει

[7] Το ζήτημα αυτό αναλύεται διεξοδικά στο [2] (σσ.75-76).

την αρχική χρήση του x ως μεταβλητής αν στον ορισμό της δεύτερης παραγώγου χρησιμοποιούσε ένα διαφορετικό γράμμα.

Όλες οι προηγούμενες απαντήσεις στο ερώτημα 4(β) στηρίχτηκαν στον ορισμό της έννοιας της παραγώγου, δηλαδή ακολούθησαν λίγο-πολύ τη μέθοδο που υιοθέτησαν οι συγγραφείς στις λύσεις του σχολικού βιβλίου καθώς και η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων. Όσοι όμως ασχολούνται με την αξιολόγηση των γραπτών στα Βαθμολογικά Κέντρα γνωρίζουν ότι οι υποψήφιοι χρησιμοποιούν μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων, που πολλές φορές εκπλήσσουν με την επινοητικότητά τους. Δεν θα μπορούσαν λοιπόν να απουσιάζουν από μία τέτοια συλλογή οι προσπάθειες αρκετών υποψηφίων, οι οποίοι κατανόησαν το ερώτημα ως μια άσκηση υπολογισμού ορίου και αποφάσισαν να εφαρμόσουν τον κανόνα De l' Hospital ή το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Παραθέτουμε δύο τέτοιες χαρακτηριστικές «αποδείξεις», <u>όπως ακριβώς</u> δόθηκαν στα αντίστοιχα γραπτά, και προτείνουμε στον αναγνώστη να ασχοληθεί με την πολύ ενδιαφέρουσα άσκηση εντοπισμού των επίμαχων σημείων:

Εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\left(g'(x)-g'(x-h)\right)'}{\left(h\right)'}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0-g''(x-h)(x-h)'}{1} = \lim_{h\to 0} -g''(x-h)(-1) = \lim_{h\to 0} g''(x-h) = g''(x)$$

Εφόσον παραγωγίζουμε ως προς h, $\left(g'(x)\right)' = 0$ θεωρείται αριθμός.

Εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο υποδιάστημα $[x-h, x]$

Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο υποδιάστημα $[x-h, x]$

Άρα από Θ.Μ.Τ. ισχύει υπάρχει ένα $\xi \in (x-h, x)$ ώστε:

$$g''(\xi) = \frac{g'(x)-g'(x-h)}{x-x+h} = \frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Επειδή $x-h < \xi < x$, θα ισχύει $h \to 0 \Rightarrow \xi \to x$

Άρα από τη σχέση του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} g''(\xi) = \lim_{\xi\to x} g''(\xi) = g''(x)$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις γίνεται στο τελευταίο βήμα αυθαίρετη χρήση της συνέχειας της δεύτερης παραγώγου. Στη δεύτερη περίπτωση όμως υπάρχει και ένα βαθύτερο ζήτημα που αφορά τη χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε διάστημα με μεταβλητό άκρο για τον υπολογισμό ορίων.[8]

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των απαντήσεων που δόθηκαν στο ερώτημα 4(β) των εξετάσεων του 2008, θέλουμε να επισημάνουμε το εξής: Κανείς υποψήφιος δεν αξιοποίησε τη γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της παραγώγου, με την οποία μπορεί να δοθεί μια πολύ ικανοποιητική αιτιολόγηση της ζητούμενης σχέσης. Αυτή δεν συνιστά προφανώς αυστηρή απόδειξη, αλλά δείχνει ότι ο εξεταζόμενος διαθέτει μια εννοιολογική κατανόηση του ζητήματος η οποία θα αξιολογηθεί θετικά.

Η διαισθητική προσέγγιση μέσω της αξιοποίησης γραφικών παραστάσεων, που προτείνουν συνεχώς οι επίσημες οδηγίες διδασκαλίας, θα μπορούσε να συμβάλει σε μια ουσιαστική εμβάθυνση στην έννοια του ορίου, αν η χρήση της ήταν συνεπής και συστηματική. Δηλαδή θεμελιώδεις έννοιες (όπως η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης), που ορίζονται με χρήση της έννοιας του ορίου θα πρέπει κατά την εισαγωγή τους να συνδέονται στενά με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων και η διδασκαλία τους να καθιστά φανερή τη ζωτική σημασία της γεωμετρικής ερμηνείας ως εργαλείο αιτιολόγησης. Η εξοικείωση με αυτή τη διαδικασία θα οδηγούσε προφανώς αρκετούς υποψήφιους να επιχειρήσουν μια γεωμετρική προσέγγιση στο ερώτημα 4(β) το 2008. Η εμβάθυνση όμως αυτή δεν αποτελεί κύριο στόχο της διδασκαλίας στην Γ΄ Λυκείου, όπου η έμφαση δίνεται στον υπολογισμό ορίων με βάση τις αντίστοιχες αλγεβρικές ιδιότητες, ούτε αποτελεί ζητούμενο στα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι το ερώτημα 4(β) του 2008, ως παραλλαγή άσκησης του σχολικού βιβλίου, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί «πρωτότυπο» με τα συνήθη εξεταστικά κριτήρια. Η απόφαση όμως των θεματοδοτών να αντικαταστήσουν το x_o της άσκησης από το x δικαιολογεί τους χαρακτηρισμούς «παραπλανητικό» και «παγίδα» που χρησιμοποιήθηκαν στη δημόσια συζήτηση εκείνη την περίοδο.

Η μεγάλη αποτυχία στο συγκεκριμένο ερώτημα (το 90% των υποψηφίων έλαβε 0 ή 1 μονάδες και μόνο το 6% όλες τις μονάδες) ανέδειξε τις μεγάλες παρανοήσεις των αποφοίτων του Λυκείου (και όχι μόνο!) για βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως η μεταβλητή.

[8] Μια ενδιαφέρουσα συζήτηση για το ζήτημα αυτό έχει διεξαχθεί πριν μερικά χρόνια στον ιστότοπο mathematica.gr (βλ. [8]), ενώ σημαντικές σχετικές παρατηρήσεις υπάρχουν στο [9], σσ.15-18.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

[1] Γ. Θωμαΐδης. Τα θέματα των εξετάσεων, η μαθηματική απόδειξη και η διδασκαλία των Μαθηματικών. *Απολλώνιος* 4, σσ.28–48, 2004.

[2] Γ. Θωμαΐδης. *Μαθηματικά και Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2009.

[3] Μ. Στεργίου, *Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου: Θεωρία – Θέματα Εξετάσεων – Συστηματοποίηση των Ασκήσεων*, 2017.

[4] Ν. Μανάρας, Δ. Μπαρούτης & Γ. Χριστοδουλίδης. Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017 – Στατιστική έρευνα γραπτών Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών και Οικονομικών Σπουδών 53ου Βαθμολογικού Κέντρου. *Πρακτικά 10ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.674-686. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κ. Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2018.

[5] Γ. Απλακίδης. Οι επιδόσεις στα Μαθηματικά των Γενικών Εξετάσεων. Παρατηρήσεις, σχόλια, προτάσεις. *Πρακτικά 10ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.114–124. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κ. Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2018.

[6] Θ. Μαμούρης. Συναρτήσεις. *Ευκλείδης Β΄* τόμος ΙΗ΄, τεύχος 1 (Σεπτέμβριος – Οκτώβριος 1984), σσ.50–55, 1984.

[7] Ν. Μαυρογιάννης κ.α. *Η κατάρρευση της Άλγεβρας*. Συζήτηση στον ιστότοπο mathematica.gr

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=36796&sid=bfd4746b4ec35fc372e3ff095b52de04

[8] Χ. Κυριαζής κ.α.. *Που είναι το λάθος;* Συζήτηση στον ιστότοπο mathematica.gr

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=52433

[9] Γ. Δαμβακάκις, Ν. Κτιστάκης, Μ. Λάμπρου & Ν.Κ. Σπανουδάκης. *Επαναληπτικά Θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου*. Καγκουρό Ελλάς, 2008.