ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
4 Νοεμβρίου 2023

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{-(-5)^2+(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023}+\frac{22}{23} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=-[(3-7)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}.$$

Λύση

Υπολογίζουμε τις δύο αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{-(-5)^2+(-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023}+\frac{22}{23}=\left(\frac{-25+9}{16}\right)^{2023}+\frac{22}{23}$$

$$=(-1)^{2023}+\frac{22}{23}=-1+\frac{22}{23}=-\frac{1}{23}.$$

$$\mathrm{B}=-[(3-7)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}=-[(-4)^2+(-2)^3-9]^2+\frac{23}{24}=$$

$$-(16-8-9)^2+\frac{23}{24}=-(-1)^2+\frac{23}{24}=-1+\frac{23}{24}=-\frac{1}{24}.$$

Επειδή είναι

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{1}{23}-\left(-\frac{1}{24}\right)=-\frac{1}{23}+\frac{1}{24}=-\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{24}\right)=-\frac{1}{23\cdot 24}<0,$$

έπεται ότι: $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι ίσος με 3, όπου x θετικός ακέραιος μικρότερος του 50. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x.

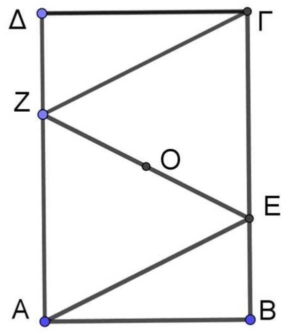
Λύση

Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι το 3, έπεται ότι πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή οι πιθανές τιμές του $x, 0<x<50$ είναι οι εξής:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48.$$

Όμως, όταν ο x είναι πολλαπλάσιο του 6 ή πολλαπλάσιο του 9, τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x θα είναι μεγαλύτερος του 3, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε όλα τα πολλαπλάσια αυτών των δύο αριθμών.
Άρα οι δυνατές τιμές του x είναι οι: $3, 15, 21, 33, 39$, για τις οποίες εύκολα επαληθεύουμε ότι $\text{ΜΚΔ}(18, x) = 3$.
Επομένως οι δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x είναι $\text{ΕΚΠ}(18,3) = 18$, $\text{ΕΚΠ}(18,15) = 90$, $\text{ΕΚΠ}(18,21) = 126$, $\text{ΕΚΠ}(18,33) = 198$, και $\text{ΕΚΠ}(18,39) = 234$.

Πρόβλημα 3. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλα και το σημείο Ο είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\text{ΑΕ} = \text{ΓΖ}$.
(β) $\text{ΒΕ} = \text{ΔΖ}$.
(γ) Τα σημεία Β, Ο και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ.
Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*



Λύση
(α) Επειδή από την υπόθεση είναι $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΓΖ}$ και $\text{ΑΖ} \parallel \text{ΕΓ}$ το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Άρα έχουμε: $\text{ΑΕ} = \text{ΓΖ}$.

(β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ προκύπτει ότι:

$$\text{ΑΖ} = \text{ΕΓ} \qquad (1)$$

Επίσης το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, οπότε

$$\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ} \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της ισότητας (1) από την ισότητα (2), έχουμε:

$$\text{ΑΔ} - \text{ΑΖ} = \text{ΒΓ} - \text{ΕΓ} \Rightarrow \text{ΔΖ} = \text{ΒΕ}.$$

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ είναι κοινή διαγώνιος στα παραλληλόγραμμα ΑΕΓΖ και ΑΒΓΔ. Επομένως το μέσο Ο της διαγωνίου ΕΖ είναι και μέσο της ΑΓ και επίσης από το Ο περνάει η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επιπλέον αυτό είναι το μέσο της.

Πρόβλημα 4. Η δασκάλα μιας τάξης 20 παιδιών θέλει να επιλέξει τυχαία κάποια από αυτά για να την εκπροσωπήσουν στη Βουλή. Τοποθετεί τα παιδιά σε έναν κύκλο και τους μοιράζει από ένα φάκελο που μέσα γράφει έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 20. Κάθε αριθμός εμφανίζεται μόνο μία φορά. Αφού ανοίξουν τους φακέλους, ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν έχει δίπλα του (δεξιά και αριστερά του) ένα παιδί με μικρότερο αριθμό και ένα παιδί με μεγαλύτερο αριθμό. Τελικά επιλέχθηκαν 7 παιδιά. Είναι δυνατόν το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113;

Λύση

Παρατηρούμε ότι το παιδί που έχει το φάκελο με τον αριθμό 20 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού εκατέρωθεν αυτού στον κύκλο έχει παιδιά με μικρότερους αριθμούς. Συνεπώς το μέγιστο το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν είναι το πολύ

$$19+18+17+16+15+14+13 = 112.$$

Επομένως δεν υπάρχει καμιά διάταξη των παιδιών ώστε το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η αριθμητική παράσταση

$$\mathrm{A}=\left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}}+3\cdot\frac{32^6}{4^5}\right]^{100}:(12^2-4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης Α ως δύναμη με βάση το 2.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left[\frac{(-2)^{-1}}{(-8)^{-10}}+3\cdot\frac{32^6}{4^5}\right]^{100}:(12^2-4^2)^{300}$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{-2}\right)^{10}+3\cdot\frac{(2^5)^6}{(2^2)^5}\right]^{100}:(144-16)^{300}$$

$$=\left[4^{10}+3\cdot\frac{2^{30}}{2^{10}}\right]^{100}:128^{300}=[(2^2)^{10}+3\cdot 2^{20}]^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=[2^{20}+3\cdot 2^{20}]^{100}:(2^7)^{300}=(4\cdot 2^{20})^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=(2^2\cdot 2^{20})^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=(2^{22})^{100}:(2^7)^{300}=2^{2200}\cdot 2^{2100}=2^{100}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{2023xy}$, όπου x,y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
Να προσδιορίσετε τα ψηφία x,y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Λύση

Έχουμε:

$$\mathrm{A}=2023xy=202300+10x+y=17\cdot 11900+10x+y,$$

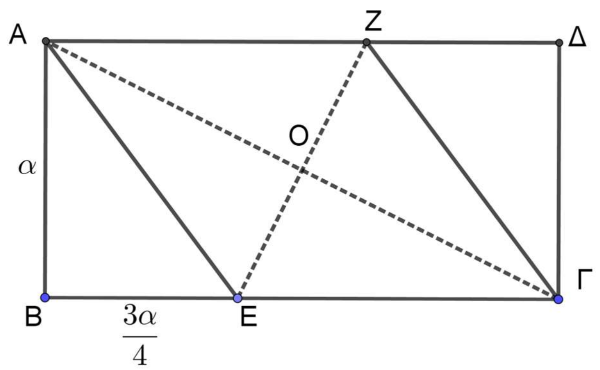
οπότε για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 17 αρκεί ο αριθμός $\overline{xy}=10x+y$ να διαιρείται με το 17, δηλαδή αρκεί $\overline{xy}=10x+y\in\{17,34,51,68,85\}$.
Άρα οι λύσεις είναι τα ζεύγη:

$$(x,y)\in\{(1,7),(3,4),(5,1),(6,8),(8,5)\}.$$

Πρόβλημα 3. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός (από τους αρχικούς 7) που διαιρείται με το 10.

Λύση. Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν 4 περιττοί αριθμοί, γιατί τότε το 10 δεν θα διαιρούσε το γινόμενό τους. Επομένως οι περιττοί αριθμοί είναι το πολύ τρεις. Άρα οι άρτιοι είναι τουλάχιστον τέσσερεις. Ομοίως, δεν να υπάρχουν 4 αριθμοί που να μην διαιρούνται με το 5, γιατί τότε το γινόμενό τους δεν διαιρείται με το 10. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 3 αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 5, άρα τα πολλαπλάσια του 4 είναι τουλάχιστον 4. Τελικά εφόσον υπάρχουν 7 αριθμοί, υπάρχει κάποιος που είναι πολλαπλάσιο και του 2 και του 5, άρα πολλαπλάσιο του 10.

Πρόβλημα 4.



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\text{ΑΒ} = \alpha$, $\text{ΒΓ} = 2\alpha$. Οι ευθείες ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλες και $\text{ΒΕ} = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{ΑΕ} = \text{ΑΖ}$.

(β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.

(γ) $\text{ΑΓ} = 2 \cdot \text{ΕΖ}$.

Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή ΑΒΓΔ ορθογώνιο έπεται ότι ΒΓ ∥ ΑΔ, οπότε θα είναι και ΕΓ ∥ ΑΖ. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΕ ∥ ΓΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Από την υπόθεση έχουμε:

$$\text{ΕΓ} = 2\alpha - \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (1)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει:

$$\text{ΑΕ}^2 = \sqrt{\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΕ}^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16}} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{16}} \Rightarrow \text{ΑΕ} = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\text{ΑΕ} = \text{ΕΓ}$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

(β) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχουν κοινή τη διαγώνιο ΑΓ. Επομένως η άλλη διαγώνιος εκάστου από αυτά θα περνάει από το μέσο της ΑΓ.

(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{ΑΓ}^2 = \sqrt{\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow \text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{5}. \qquad (3)$$

Για το εμβαδό του ρόμβου έχουμε:

$$E_{A\text{ΕΓΖ}} = \frac{1}{2}\cdot \text{ΑΓ}\cdot \text{ΕΖ} = \text{ΑΒ}\cdot \text{ΕΓ} \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot EZ = \alpha\cdot\frac{5\alpha}{4} \Rightarrow \text{ΕΖ} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $\text{ΑΓ} = 2\cdot \text{ΕΖ}$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = 1$$

Συνεπώς, είτε και οι τρεις θα είναι ίσοι με 1 είτε ένας εξ αυτών θα ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1.

(1ος τρόπος) Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c$, οπότε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3a\cdot\frac{3}{a} = 9.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, λόγω κυκλικής συμμετρίας, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\frac{a}{b} = 1, \qquad \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = -1 \ \Longrightarrow\ a = b = -c \ \Longrightarrow\ b + c = 0 = \frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0,$$

οπότε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = a\cdot\frac{1}{a} = 1.$$

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)+1$$

Έτσι, αν και οι τρεις αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ είναι ίσοι με 1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $2\cdot 2\cdot 2+1 = 9$, ενώ αν ένας εξ αυτών ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $0+1 = 1$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ είναι το 9 και το 1.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, με $y \neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2 - 4x + \frac{5}{y+2} = 2 \ \text{ και }\ 3(x-2)^2 - \frac{4}{y+2} = -1.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\alpha = (x-2)^2 \text{ και } \beta = \frac{1}{y+2}$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\{\alpha + 5\beta = 6, \qquad 3\alpha - 4\beta = -1\} \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 1.$$

Άρα έχουμε:

$$\alpha = (x-2)^2 = 1 \text{ και } \beta = \frac{1}{y+2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1, y = -1$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ ή } (x, y) = (3, -1).$$

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 2023 \cdot 10^n + 1,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση. (1ος τρόπος). Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.
Έστω $\mathrm{A} = 2023 \cdot 10^n + 1 = x^2$, για κάποιο ακέραιο x. Το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι ίσο με 8, οπότε ο Α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα ούτε και ο x. Τότε

$$\mathrm{A} - 1 = 2023 \cdot 10^n = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

με $x - 1$ ή $x + 1$ πολλαπλάσιο του 3, άτοπο, αφού το άθροισμα των ψηφίων του Α −1 είναι ίσο με 7.

(2ος τρόπος) Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 3k, x = 3k + 1, x = 3k + 2$, με k ακέραιο, βλέπουμε ότι το τετράγωνο x^2 ενός ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 3. Αφού

$$\mathrm{A} = 2022999\ldots9 + 2 = \pi o\lambda. 3 + 2$$

όπου το 9 εμφανίζεται n φορές, ο Α δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Σε ένα κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ||ΔΓ. Έστω Ε το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας Α του τραπεζίου με τον κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$. Αν η παράλληλη από το Ε στην ΔΓ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ, να δειχθεί ότι η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

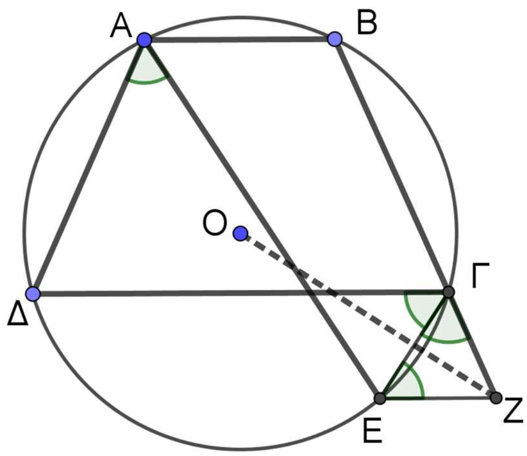
Λύση

Δίνεται ότι η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$, και ΕΖ||ΔΓ, ενώ γνωρίζουμε ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Έτσι, έχουμε

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\Delta = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}.$$

Αφού το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$, και αφού ΕΖ||ΔΓ είναι

$$\mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{B}} = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}}.$$



Άρα στο τρίγωνο ΕΖΓ είναι

$$\mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{Z} = 180^\circ - \mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma - \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{\mathrm{A}}\right) - \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{Z}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma.$$

Επομένως, το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές με ΕΖ = ΓΖ. Αφού ΟΕ = ΟΓ, τα σημεία Ο και Ζ ορίζουν την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΓ. Συνεπώς, η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = 4a\cdot\frac{4}{a} = 16.$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a+b+c+d = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=-1 \text{ και } \frac{c}{d}=\frac{d}{a}=1$$

παίρνουμε

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=2a\cdot\frac{2}{a}=4.$$

Στην τρίτη περίπτωση όπου

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=-1,$$

παίρνουμε $a+b=b+c=c+d=d+a=0$, οπότε $a=c$ και $b=d$ και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0, αφού $a+b+c+d=0$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε κάποιος από τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^n+6,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος θετικός ακέραιος. Έστω ότι

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^n+6=x^2, \text{ για κάποιο ακέραιο } x.$$

(1ος τρόπος) Αφού ο A είναι άρτιος, θα είναι $x=2y$ για κάποιο ακέραιο y, οπότε θα έχουμε

$$2023\cdot 10^n+6=4y^2$$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 2,

$$10115\cdot 10^{n-1}+3=2y^2$$

Εάν $n=1$, η τελευταία σχέση δίνει $y^2=5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).
Εάν $n>1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεξί είναι άρτιος, άτοπο. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(2ος τρόπος) Αν $n=1$, τότε $\mathrm{A}=20236=4\cdot 5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).

Εάν $n>1$, τότε ο αριθμός $\mathrm{A}-2=2023\cdot 10^n+4$ διαιρείται με το 4. Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x=4k+\upsilon$, με k ακέραιο και $0\leq\upsilon\leq 3$ βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 4. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(3ος τρόπος) Αφού το 2023 είναι πολλαπλάσιο του 7, βλέπουμε ότι ο Α αφήνει υπόλοιπο 6 κατά τη διαίρεσή του με το 7.
Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 7k + \upsilon$, με k ακέραιο και $0 \leq \upsilon \leq 6$, βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2 ή 4 κατά τη διαίρεσή του με το 7. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. Δίνονται τα τριώνυμα $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $Q(x) = x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ακέραιους, τέτοια ώστε $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$. Να δειχθεί ότι το άθροισμα $\alpha + \gamma$ και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.

Λύση. (**1ος τρόπος**) Αφού $P(2022) = Q(1)$ παίρνουμε

$$2022^2 + 2022\alpha + \beta = 1 + \gamma + \delta,$$

οπότε

$$\gamma + \delta + \alpha - \beta = 2023\alpha + 2022^2 - 1 = 2023(\alpha + 2021).$$

και αφού $Q(2022) = P(1)$ παίρνουμε $2022^2 + 2022\gamma + \delta = 1 + \alpha + \beta$, οπότε

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta = 2023\gamma + 2022^2 - 1 = 2023(\gamma + 2021).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε $2(\beta - \delta) = 2023(\gamma - \alpha)$, οπότε

$$\beta - \delta = \frac{2023(\gamma - \alpha)}{2}.$$

Αφού το 2023 είναι περιττός αριθμός και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι ακέραιος, θα πρέπει η διαφορά $\gamma - \alpha$ να είναι άρτιος. Συνεπώς η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 2023, και το άθροισμα

$$\alpha + \gamma = 2023(\gamma + 2021) - (\beta - \delta)$$

είναι πολλαπλάσιο του 2023.

(2ος τρόπος)
Αφού $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$, η εξίσωση

$$Q(x) = P(2023 - x),$$

έχει λύσεις $x = 1$ και $x = 2022$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x^2 + \gamma x + \delta = (2023 - x)^2 + \alpha(2023 - x) + \beta,$$

ή, κάνοντας τις πράξεις, ισοδύναμα

$$(\alpha + \gamma + 4046)x = 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2.$$

Αν $\alpha + \gamma + 4046 \neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x, άτοπο. Άρα

$$\alpha + \gamma + 4046 = 0 \quad \text{και} \quad 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2 = 0.$$

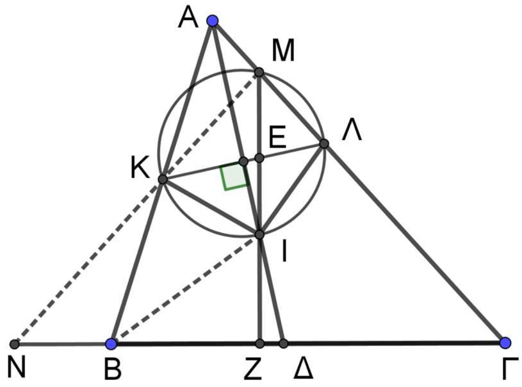
Συνεπώς,

$$\alpha + \gamma = -4046 \quad \text{και} \quad \beta - \delta = -2023\alpha - 2023^2,$$

δηλ. πολλαπλάσια του 2023.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ.

Θεωρούμε σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΒΔ, και σημείο Λ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΛ = ΑΚ. Αν Μ είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΙΛ με την ΑΛ (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ είναι κάθετη στην ΒΓ.



Λύση

Τα τρίγωνα ΚΒΙ και ΔΒΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΒΙ κοινή, ΒΚ = ΒΔ, ΚΒΙ = ΔΒΙ), οπότε

$$\mathrm{I}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = \mathrm{I}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2},$$

ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ.
Έτσι στο τετράπλευρο ΚΙΔΒ είναι

$$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\Delta = 360^\circ - \widehat{\mathrm{B}} - 2\left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 360^\circ - \widehat{\mathrm{B}} - 2\widehat{\Gamma} - \widehat{\mathrm{A}} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}.$$

Τα τρίγωνα ΑΚΙ και ΑΛΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΑΙ κοινή, ΑΚ = ΑΛ, ΚΑΙ = ΛΑΙ), οπότε

$$\Lambda\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = 180^\circ - \mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\Delta = \widehat{\Gamma}.$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΚΙΛΜ παίρνουμε

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\Lambda = 2 \cdot \Lambda\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}.$$

Από αυτό στο σημείο μπορούμε να συνεχίσουμε με δύο τρόπους:

(**1ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{AI} \perp \mathrm{K}\Lambda$, οπότε $\mathrm{M}\widehat{\Lambda}\mathrm{K} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{A}}/2$, και

$$\mathrm{M}\widehat{\mathrm{I}}\Lambda = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K} - \mathrm{M}\widehat{\Lambda}\mathrm{K} = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{\mathrm{A}}/2).$$

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΜΙ με την ΒΓ. Τότε έχουμε

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{I}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{M} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{I}}\Lambda - \mathrm{M}\widehat{\mathrm{I}}\Lambda = \widehat{\Gamma} - (2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{\mathrm{A}}/2)) = 90^\circ - \widehat{\mathrm{A}}/2 - \widehat{\Gamma}.$$

Έτσι

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{I}}\Delta + \mathrm{I}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = \left(90^\circ - \widehat{\mathrm{A}}/2 - \widehat{\Gamma}\right) + \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 90^\circ$$

και άρα $\mathrm{I}\widehat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$, όπως θέλαμε.

(**2ος τρόπος**) Έχουμε

$$\mathrm{M}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{I} = 180^\circ - \mathrm{M}\widehat{\Lambda}\mathrm{I} = 180^\circ - \mathrm{A}\widehat{\Lambda}\mathrm{I} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{I}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{B},$$

δηλαδή, το Ι είναι παράκεντρο του τριγώνου ΑΚΜ, και άρα η ΜΙ είναι η

διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$. Έτσι, αν Ν είναι το σημείο τομής της ευθείας ΜΚ με την ευθεία ΓΒ, σχηματίζεται το ισοσκελές τρίγωνο ΝΜΓ με

$$\widehat{\mathrm{N}} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{N} - \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{N} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K} - \widehat{\Gamma} = 2\cdot\widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}.$$

Αφού η ΜΙ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου ΝΜΓ, είναι κάθετη στην ΒΓ.

<u>Σχόλιο.</u> Ένας άλλος τρόπος για τη σχέση $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = \widehat{\Gamma}$ είναι ο εξής:
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΔ, βρίσκουμε

$$\mathrm{BK\Delta} = \mathrm{B\Delta K} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{B}}/2 = \widehat{\mathrm{A}}/2 + \widehat{\Gamma}/2.$$

Επειδή $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{I} = \widehat{\mathrm{A}}/2 + \widehat{\Gamma}$, έχουμε ότι $\mathrm{I}\widehat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{I}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = \widehat{\Gamma}/2$. Άρα $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = \widehat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$,$\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$,$\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{e}\right) = 16$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a = -b$ και $c = -d$ ή $c = -b$ και $d = -a$ οπότε

$$a^3+b^3 = 0 \text{ και } c^3+d^3 = 0 \text{ ή } b^3+c^3 = 0 \text{ και } a^3+d^3 = 0$$

Επομένως έχουμε $a^3+b^3+c^3+d^3 = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = -1 \text{ και } \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = 1$$

παίρνουμε

$$a^3 + b^3 = 0 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \text{ και } c = d,$$

οπότε

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\right) = 2c^3 \cdot \frac{2}{c^3} = 4.$$

Στην τρίτη περίπτωση όπου

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = -1,$$

παίρνουμε $a + b = b + c = c + d = d + a = 0$, οπότε $a = c$ και $b = d$ και $a^3 + b^3 = 0$ από τις οποίες προκύπτουν οι ισότητες $a^3 = c^3$ και $b^3 = d^3$, οπότε

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2 \cdot (a^3 + b^3) = 0$$

και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Άρα, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{e}\right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. Ένα πολυώνυμο είναι βαθμού 2024 και έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει;

Λύση

Αν έχει μόνον έναν μη μηδενικό συντελεστή, τότε το πολυώνυμο είναι της μορφής $P(x) = ax^{2024}, a \neq 0$, το οποίο τη μόνο τη ρίζα $x = 0$ με πολλαπλότητα 2024. Αν έχει μόνο δύο μη μηδενικούς συντελεστές, τότε το πολυώνυμο είναι είτε της μορφής $P(x) = x^{2024} - c$, το οποίο έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, είτε της μορφής $P(x) = x^{2024} - cx^k = x^k(x^{2024-} \ - c)$, το οποίο έχει μια ρίζα το 0 και το πολύ δύο ακόμη από το $x^{2024-k} - c$. Επομένως, το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2023 μηδενικούς συντελεστές. Αν έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο με 4 διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Πράγματι, το πολυώνυμο

$$Q(x) = (x^{1012} - 1)(x^{1012} - 2) = x^{2024} - 3x^{1012} + 2,$$

έχει 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες και έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές. Προφανώς το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν είναι μοναδικό. Άρα το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει το δεδομένο πολυώνυμο είναι 2022.

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 2023 \cdot 10^n + 5,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A = 2023 \cdot 10^n + 5 = x^2$ για κάποιο ακέραιο x. Αφού ο αριθμός A λήγει σε 5, είναι περιττός και πολλαπλάσιο του 5. Αναγκαστικά, λοιπόν, και ο αριθμός x θα είναι περιττός και μάλιστα θα λήγει σε 5, δηλ. θα είναι πολλαπλάσιο του 5. Διαφορετικά, αν ο x λήγει σε 1, 3, 7 ή 9, το τετράγωνο του θα λήγει σε 1, 9, 9, ή 1, αντίστοιχα. Σε καμμιά περίπτωση, δηλαδή, δε λήγει σε 5, άτοπο.

(**1ος τρόπος**) Έστω $x = 10y + 5$ για κάποιο θετικό ακέραιο y. Τότε

$$x^2 = (10y + 5)^2 = 100y^2 + 100y + 25.$$

Επομένως, ο αριθμός x^2 λήγει σε 25, ενώ ο αριθμός A λήγει σε 35 (αν $n = 1$) ή 05 (αν $n > 1$). Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(**2ος τρόπος**) Έστω $x = 5y$ για κάποιο ακέραιο y. Τότε θα έχουμε

$$2023 \cdot 10^n + 5 = 25y^2,$$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 5,

$$4046 \cdot 10^{n-1} + 1 = 5y^2.$$

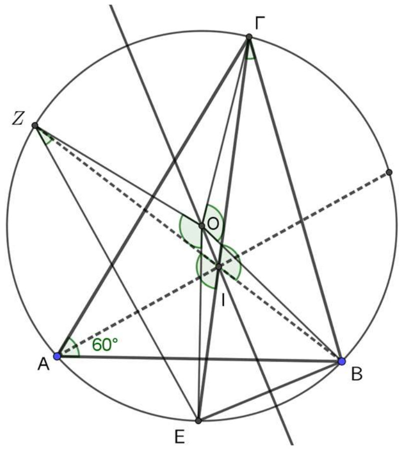
Εάν $n = 1$, η τελευταία σχέση δίνει $5y^2 = 4047$, ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Εάν $n > 1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι ίσο με (ένα πολ/σιο του 5) $+1$, ενώ το δεξί είναι πολλαπλάσιο του 5, άτοπο. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{B\Gamma} < \mathrm{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 60^\circ$. Αν Ι είναι το έκκεντρο του ΑΒΓ, Ο είναι το περίκεντρό του, και Ε είναι το μέσο του τόξου ΑΒ του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ που δεν περιέχει το Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.

Λύση.

Αφού η ΓΙ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ και το Ε είναι το μέσο του τόξου ΒΑ, παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε, Ι και Γ είναι συνευθειακά. Παρατηρούμε ότι



$$B\widehat{I}\Gamma = 180° - I\widehat{B}\Gamma - I\widehat{\Gamma}B =$$

$$180° - \widehat{B}/2 - \widehat{\Gamma}/2 = 90° + \widehat{A}/2 = 120°.$$

Αφού μια επίκεντρη γωνία κύκλου είναι διπλάσια από κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο του κύκλου έχουμε

$$B\widehat{O}\Gamma = 2\widehat{A} = 120° = B\widehat{I}\Gamma.$$

Άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΙΓ περνάει από το σημείο Ο. οπότε

$$I\widehat{O}B = I\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΒΙ με τον περιγεγραμμένο κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΕΙΟΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού το τόξο EAF έχει μέτρο 120°, οπότε

$$E\widehat{I}Z = B\widehat{I}\Gamma = 120° = E\widehat{O}Z.$$

Άρα έχουμε

$$E\widehat{O}I = E\widehat{Z}I = E\widehat{ZE} = E\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = I\widehat{O}B,$$

οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΕΒ με $OE = OB$ η ευθεία ΟΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{O}B$ και συνεπώς θα είναι και ευθεία του ύψους από την κορυφή Ο, δηλαδή η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.