Το όριο στις Πανελλαδικές και στο σχολικό βιβλίο

$$\lim_{x \to \sigma} f(x)$$

$$\lim_{x \to \sigma} f(x)$$

$+\infty$

$-\infty$

$l \in \Re$

Δεν υπάρχει

x_0^-

$+\infty$

$-\infty$

x_0

x_0^+

Κανόνας
D’ Hospital

Κριτήριο
παρεμβολής

$$\lim_{x \to \sigma} f(x)$$

Μονοτονία και
Κυρτότητα

Όριο σύνθεσης

Θεώρημα Μέσης
Τιμής

Πράξεις με το ∞

$$\alpha + \infty = \infty \qquad \alpha \neq -\infty$$

$$\alpha(\infty) = \infty \qquad \alpha \neq 0$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0 \qquad \alpha \neq \infty$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty \qquad \alpha \neq 0$$

Απροσδιόριστες μορφές

$$\lim_{x \to \sigma} f(x)$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty =$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

Βασικά όρια

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\varphi x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

Άσκηση 7 σελίδα 122

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x f(x)-e^a f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} \qquad \phi(x)=e^x f(x)$$

$$=e^a f(a)+e^a f'(a)$$

Προτεινόμενα θέματα

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x \sigma\upsilon\nu x f(x)-e^a \sigma\upsilon\nu a f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-a} \qquad \phi(x)=e^x \sigma\upsilon\nu x f(x)$$

$$=e^a \sigma\upsilon\nu a f(a)-e^a \eta\mu a f(a)+e^a \sigma\upsilon\nu a f'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x f(g(x))-e^a f(g(\alpha))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} \qquad \phi(x)=e^x f(g(x))$$

$$=e^a f(g(a))+e^\alpha f'(g(a))g'(a)$$

Άσκηση 6 σελίδα 168

$$\lim_{x\to 0^+}(1-e^{-x})\ln x = (1-1)(+\infty) = 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1-e^{-x})\ln x = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1-e^{-x})}{x}x\ln x\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-e^{-x})}{x} = \lim_{u\to 0^-}\frac{1-e^{u}}{-u}$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{e^{u}-1}{u}$$

$$=1$$

$$u=-x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=0$$

Βασικά όρια

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{x}\right)^\nu=\lim_{x\to+\infty}x^\nu=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{x}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\frac{1}{\nu}\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\nu}x}=+\infty$$

Βασικά όρια $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\nu}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\nu x^{\nu-1}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\nu x^\nu=+\infty$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}xe^x$$

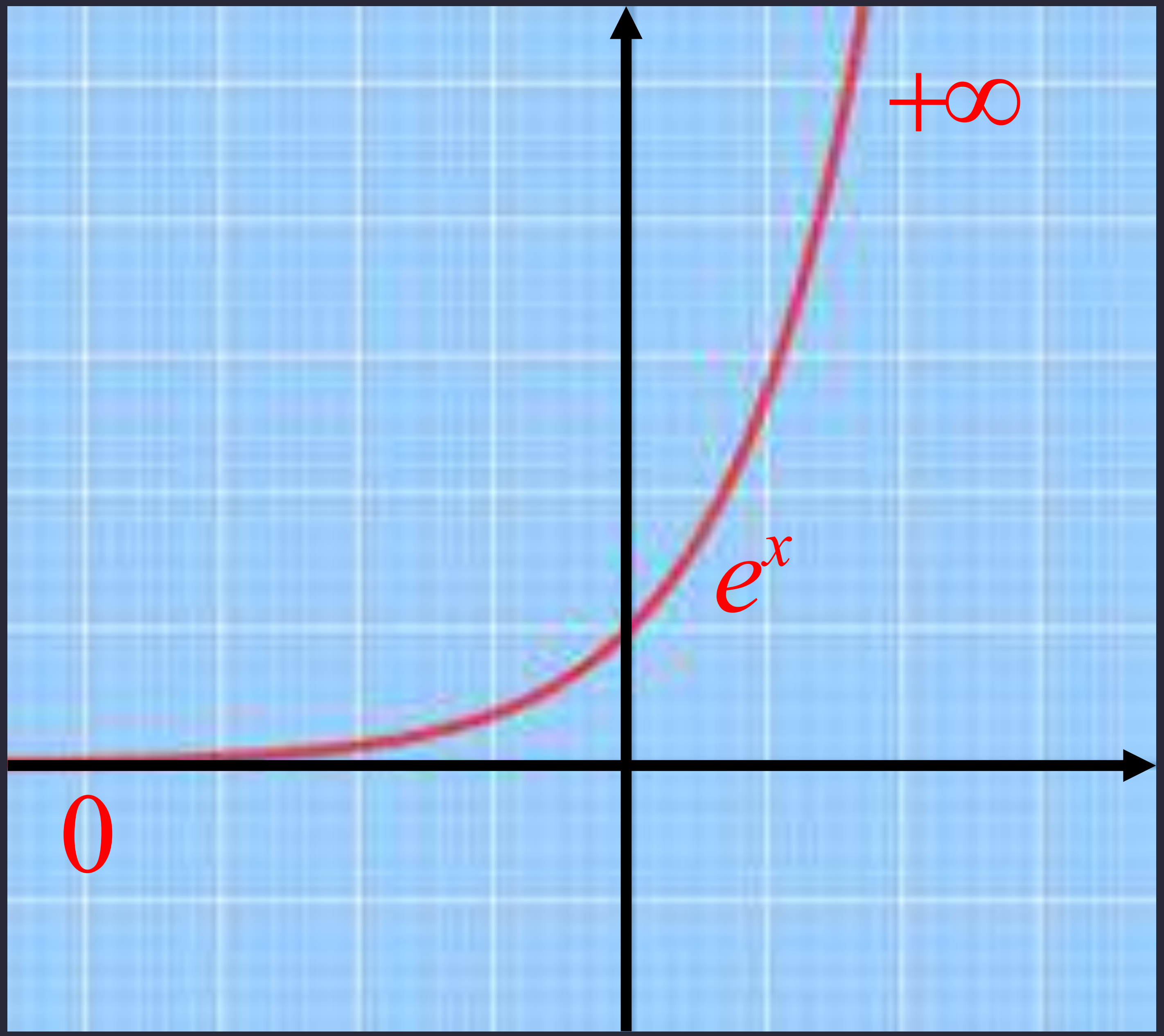
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\nu}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\nu}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$$

Εκθετικά όρια



$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

Εκθετικά όρια

0^0

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}e^{\ln x\ln(x-1)}=\lim_{x\to 0}e^{x}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\ln x\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{x\ln^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}(\ln^2 x+2\ln x)=0$$

Εκθετικά όρια

$$1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\sigma\phi x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sigma\phi x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sigma\phi x\ln(1+x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\varepsilon\phi x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1+\varepsilon\phi^{2}x} = 1$$

$$\infty^0$$

Εκθετικά όρια

$$\lim_{x\to+\infty}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+ax} = 0$$

Θεώρημα Μέσης τιμής

$$a<\beta \qquad f(x+\beta)-f(x+a)]=f'(\xi_x)(\beta-a)$$

$$x+a\le \xi_x \le x+\beta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\xi_x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+\beta)-f(x+a)]=\lim_{x\to\infty} f'(\xi_x)(\beta-a)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} f'(x)(\beta-a)$$

Εφαρμογή

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x-1}})=\lim_{x\to+\infty}(e^{\sqrt{x}})'=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=+\infty$$

Μονοτονία και κυρτότητα

$f'(x) > 0$ $\quad x \in (a, +\infty)$

$f''(x) > 0$

$f'(x) < 0$ $\quad x \in (-\infty, a)$

$f''(x) < 0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Μονοτονία και κυρτότητα

$$f''(x)=e^{\eta\mu x+2x}(\sigma\upsilon\nu x+2) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$$
$$f'(0)=1$$

$$f''(x)=e^{\eta\mu x+2x}(\sigma\upsilon\nu x+2)\Rightarrow f'(x)=e^{\eta\mu x+2x}+c$$
$$f'(0)=1\Rightarrow 1+c=1\Rightarrow c=0$$

$$f'(x)=e^{\eta\mu x+2x}>0$$
$$f''(x)>0 \qquad \Rightarrow \quad f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \ \Rightarrow \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1. Ιδιότητες των ορίων (σελ. 48)
2. Κριτήριο παρεμβολής (σελ.51)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω f,g : R→R, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x)-g(x)=x-4, \text{ για } x\in R.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3 \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-7$$

α) Να βρείτε τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ και

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 25

$$f(x)\text{-}g(x)=x\text{-}4$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$$

$$f(x)-g(x)=x-4$$

$$g(x)=-f(x)-(x-4)$$

$$g(x)=-f(x)-(x-4)$$

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{f(x)}{x}-\frac{(x-4)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-4)}{x}$$

$$=-3-1=-4$$

Κριτήριο παρεμβολής

$$-1 \le \eta\mu 2x \le 1$$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\eta\mu 2x \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$$

Μηδενική επί φραγμένη

$$\lim_{x\to\sigma}\varphi(x)f(x) = 0$$

$$m \le \varphi(x) \le M$$

$$mf(x) \le \varphi(x)f(x) \le Mf(x)$$

$$Mf(x) \le \varphi(x)f(x) \le mf(x)$$

$$\lim_{x\to\sigma} mf(x) = \lim_{x\to\sigma} Mf(x) = 0$$

Κριτήριο Παρεμβολής

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$$

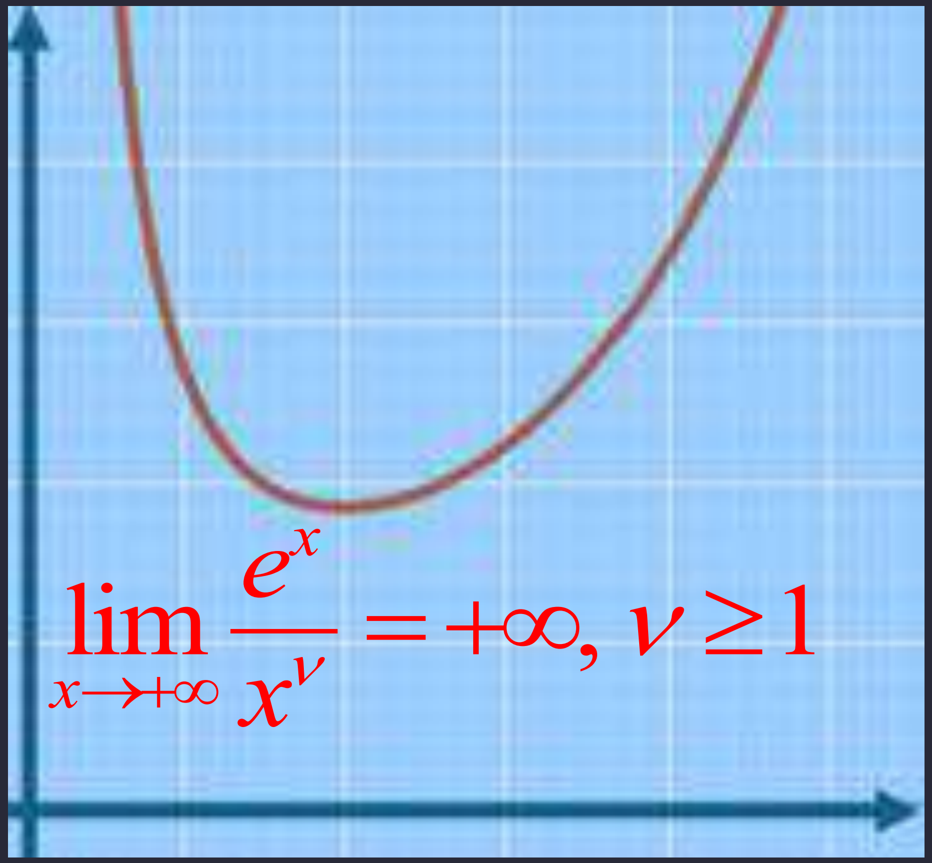
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \quad \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 4ο

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$f(x) = e^x - (x+1)$ **Μονάδες 6**



$f(x) = e^x - (x + 1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty - \infty$$

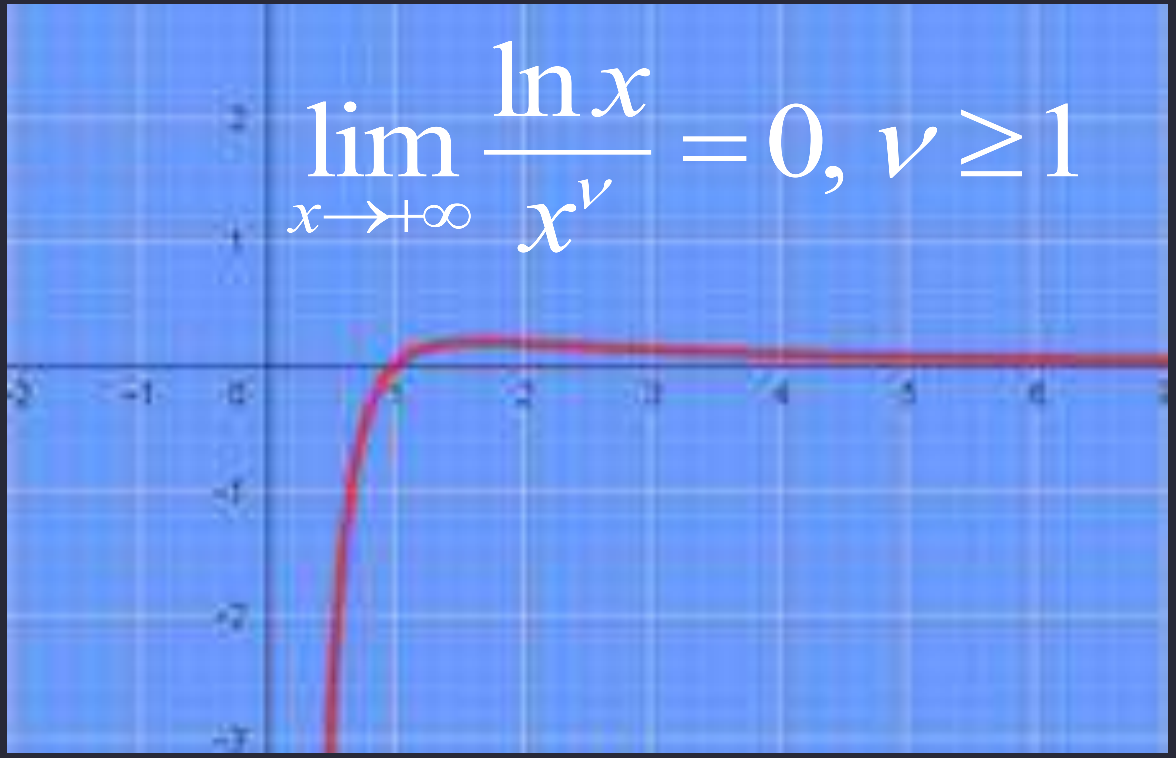
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0$$

$$f(x) = \underbrace{e^x}_{+\infty}\Big(1 - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{0}\Big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} e^{-\infty} - (-\infty + 1) = +\infty$$

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**



ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & , x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ **Μονάδες 9**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \le 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & , x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\frac{1+x\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\nu} = 0,\ \nu \ge 1$$

$$\frac{1+x\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0+0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\nu}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\nu}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\nu x^{\nu-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\nu x^\nu}$$

$$=0$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Ιδιότητες των ορίων (σελ. 48)

$$\frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

ΘΕΜΑ 1ο

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1 & x>0\end{cases} \qquad D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0 & x>0\end{cases} \qquad D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$f(x)+g(x)=1 \qquad D_{f+g}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$$f(x)g(x)=0 \qquad D_{f+g}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βοηθητική συνάρτηση
ασκ. 4 σελίδα 58

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005$$

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-x}{x^2}$$

$$f(0)=0$$

$$f(x)=x^2\varphi(x)+x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\cdot 2005+0=0$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$$

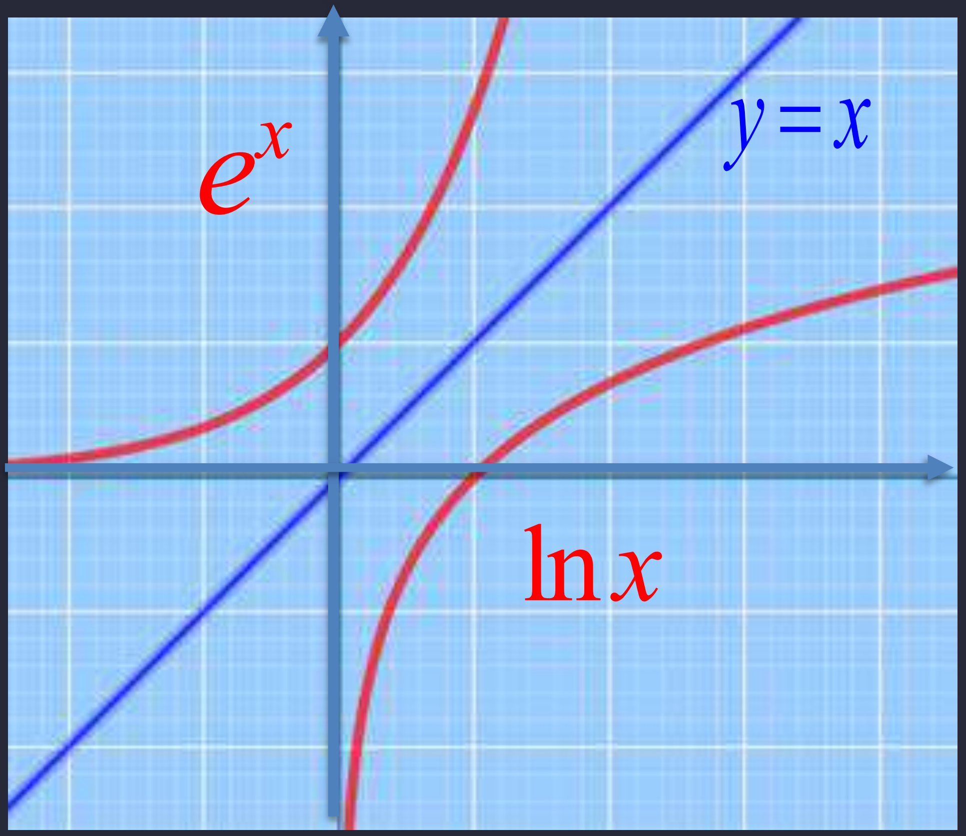
$$x\varphi(x)=\frac{f(x)-x}{x}=\frac{f(x)}{x}-1$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}=x\varphi(x)+1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\cdot 2005+1=1$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βασικά όρια



ΘΕΜΑ 4°

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$.

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \ .$$

Μονάδες 6

$$f(x) = x - \ln x + e^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

$$f(x) = e^x\left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{e^x} + 1\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty(0+0+1) = +\infty$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 3ο

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. $E(\lambda) = \dfrac{e - 2}{2\lambda}$

Μονάδες 7

Κριτήριο παρεμβολής
(Μηδενική)(Φραγμένη)

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda^2(e-2)}{(2+\eta\mu\lambda)2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e-2)}{(2+\eta\mu\lambda)\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{3}{\lambda} \leq (2+\eta\mu\lambda)\frac{1}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda}$$

$$-\frac{3}{\lambda} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{3}{\lambda} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 4ο

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

$$0\cdot(+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$$

$$x\ln(1+\frac{1}{x})\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty(\ln 1+\frac{1}{+\infty})=(+\infty)\cdot 0=\frac{0}{\frac{1}{+\infty}}=\frac{0}{0}$$

$$x\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\sim\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}=+\infty,\ \nu\geq 1$$

$$\frac{1}{\infty}=0$$

ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x^2}$.

$$I(x)=e^x-\frac{1}{3e^{3x}}-\frac{2}{3}$$ **Μονάδες 5**

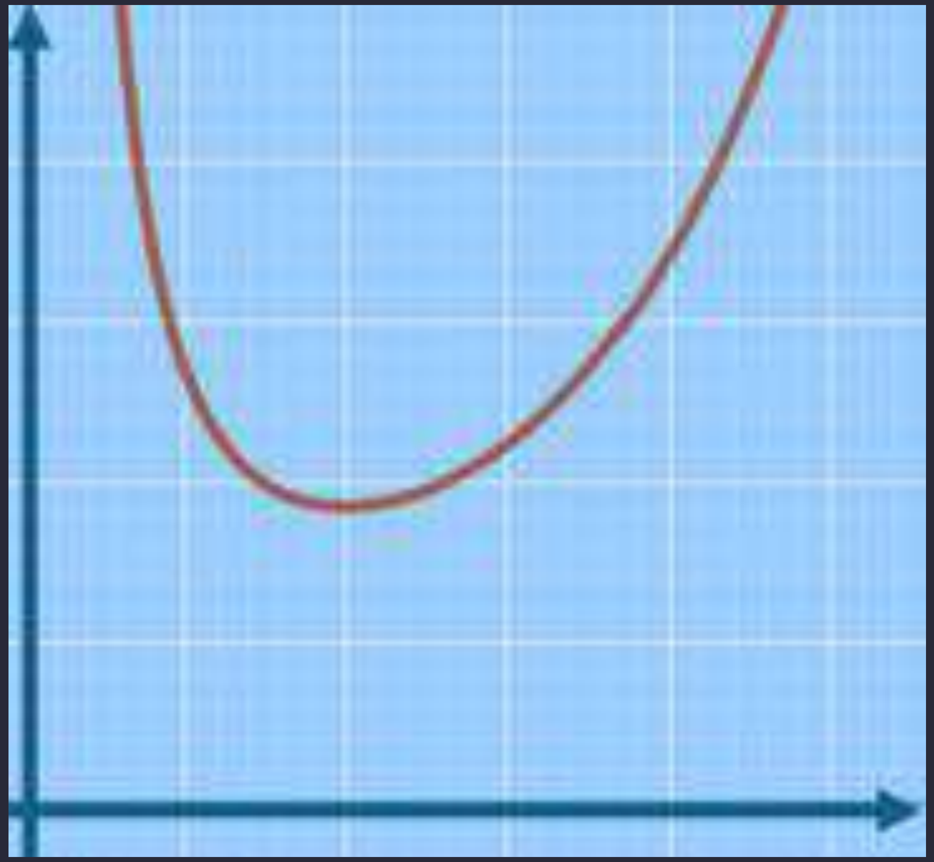
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x^2}$$

$$I(x)=e^x-\frac{1}{3e^{3x}}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{I(x)}{x^2}=\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{3x^2e^{3x}}-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\nu}=+\infty,\ \nu\geq 1$$

$$\frac{I(x)}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty-\frac{1}{+\infty}-\frac{2}{3}=+\infty-0-\frac{2}{3}=+\infty$$



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 4ο

$$f(0) > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4}$$

Μονάδες 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Αλλαγή μεταβλητής (όριο σύνθεσης)

$$f(0)>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}x^4=0}{\overset{x^4=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

$$\frac{f(0)\eta\mu x^4 2x}{x^4}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}f(0)\cdot 1\cdot 0=0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Αλλαγή μεταβλητής
(όριο σύνθεσης)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0\\[2ex] x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0.\end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3.$

Μονάδες 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=3\cdot 1=3$$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

Αλλαγή μεταβλητής

Κανόνας D’ Hospital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$f(x_0)=g(x_0)=0$$

$$g'(x_0)\neq 0$$

ΘΕΜΑ 4°

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

$f(x)=20x^3+6x-45$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

Αλλαγή μεταβλητής

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\overset{h=-u}{=}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}$$

$$=g''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\frac{-g''(x-0)(-1)}{1}$$

$$=g''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

$$\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{\sim}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}\underset{x\to h}{\to}\frac{g''(x+0)(1)-g''(x-0)(-1)}{2\cdot 1}=g''(x)$$

$$\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{\sim}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+(g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{(g'(x)-g'(x-h)}{h}=g''(x)$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_0)}{h}=\frac{f'(x_o-o)(-1)}{1}=-f'(x_o)$$

ασκ. 8 i) σελ. 103

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0+o)(1)-f'(x_0-0)(-1)=2f'(x_0)$$

ασκ. 8 ii) σελ. 103

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

$$\frac{\infty}{\infty}$$

- Παραγοντοποίηση
- D' Hospital

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x,\quad x>0$.

Έστω η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \ x>0 \\ k & , \ x=0 \end{cases}$$

1. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

$$\frac{\ln x}{x^2-2\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{2x-2\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+2\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{\frac{1}{x^4}2x}{-2\frac{1}{x^4}2x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln x}{x^2-2\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{1}{\frac{x^2}{\ln x}-2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{2}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\nu}}=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$, $x>0$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

$$\frac{x+\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$$

$$\frac{x+\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} 1+\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1+0=1$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βασικά όρια

$$\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad e^{+\infty}=+\infty$$

Αλλαγή μεταβλητής

Κανόνας D’ Hospital

ΘΕΜΑ Δ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad f(x) = e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\sim-\frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\sim\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\sim\frac{e^{-\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}\sim-e^{-\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to 0^-]{}-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell n x - x)$, $x>0$, τότε:

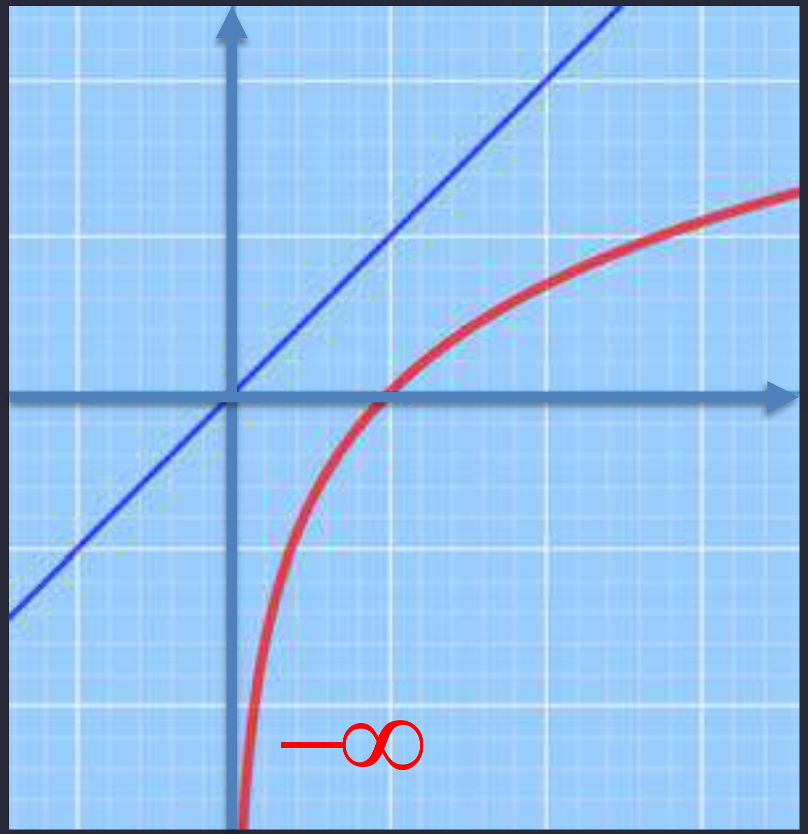
Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Μονάδες 5

Βασικά όρια

Σύνθεση(Αλλαγή μεταβλητής)

Κανόνας D' Hospital



$$f(x)=e^{-x}(\ln x-x)\underset{x\to0^-}{\to}1(-\infty-1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)^2\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)]=\lim_{x\to-\infty}[x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x]=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to0^-}[\frac{\eta\mu u}{u^2}-\frac{1}{u}]$$

$$=\lim_{x\to0^-}[\frac{\eta\mu u-u}{u^2}]$$

$$=\lim_{x\to0^-}[\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}]=0$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Δ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ $\qquad f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

$$\lim_{x\to 0^+} \left[x(\ell n x)\ell n(f(x))\right]$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 &, \ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x\to 1} \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\frac{1}{x})^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)\ln(f(x)) = 0\cdot 0 = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

Μηδενική επί φραγμένη

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$$

Να δείξετε ότι $f'(0) = 1$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$$

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$$

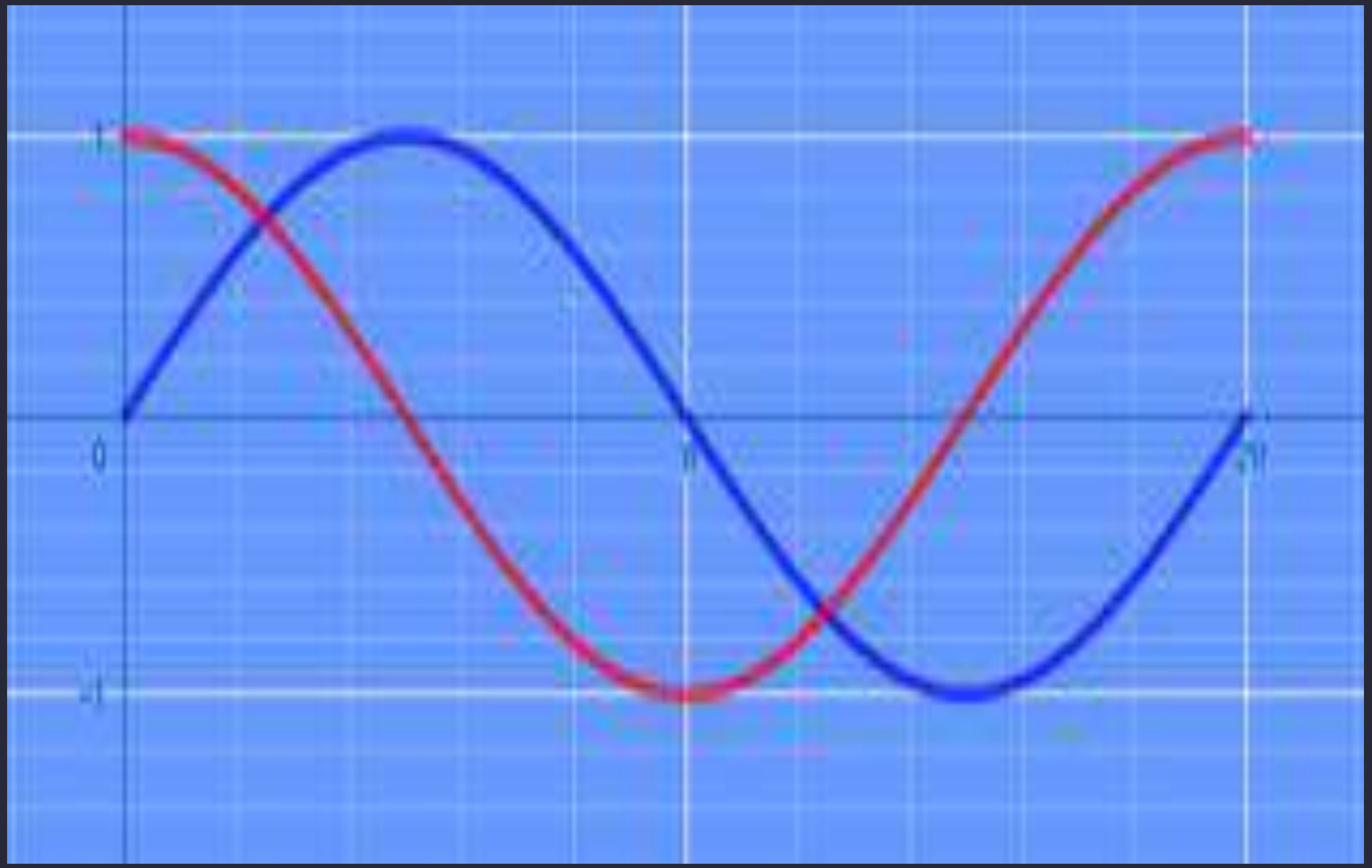
$$f(x)=\phi(x)\eta\mu x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\cdot 0=0$$

$$f(0)=0$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\,\frac{\eta\mu x}{x}=1$$



$$f \nearrow \Re = (-\infty, +\infty)$$

$$f(\Re) = \Re = (-\infty, +\infty) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

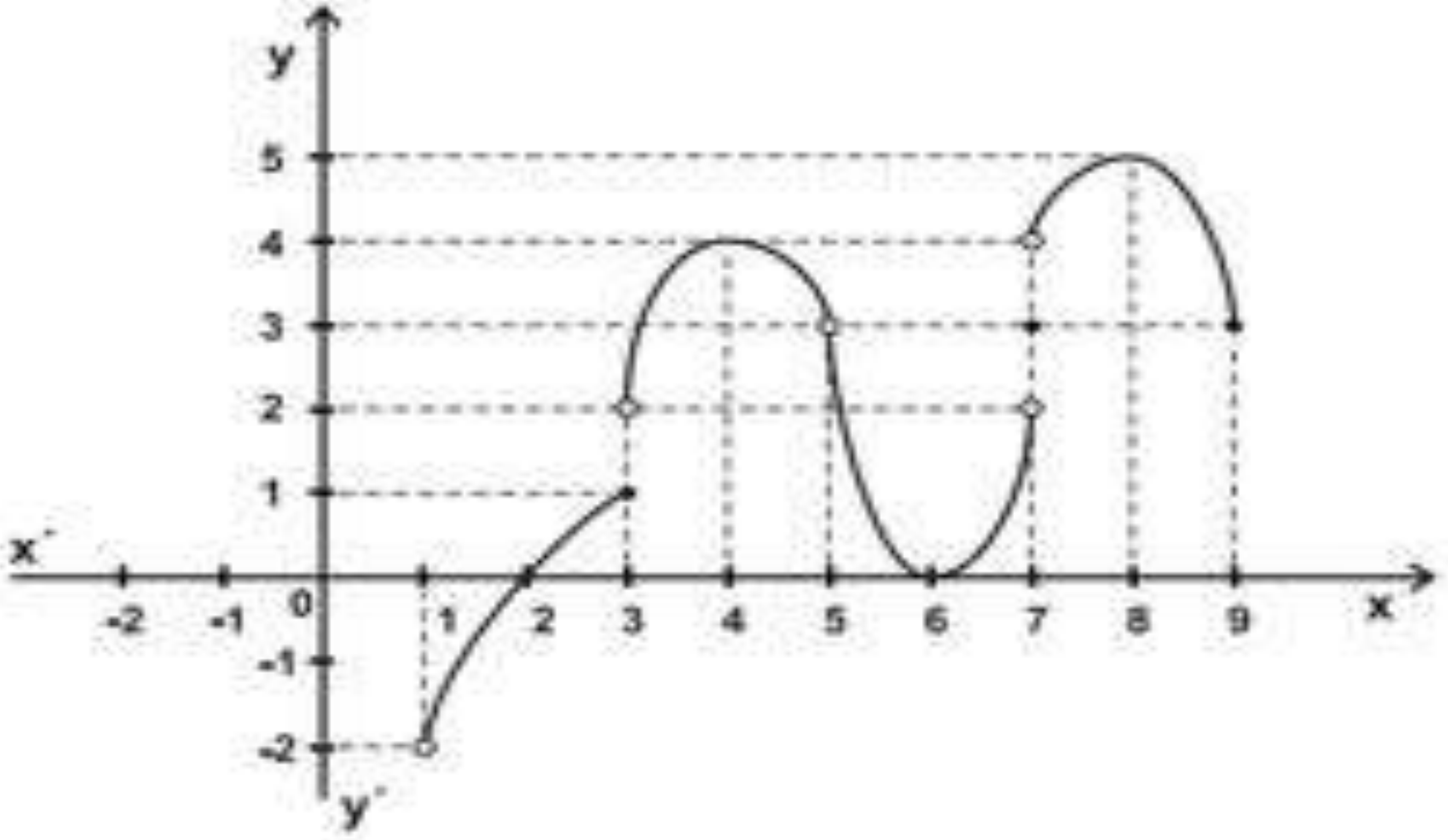
$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2$$

$$-2\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{f(x)}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}} \leq 2\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{f(x)}}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

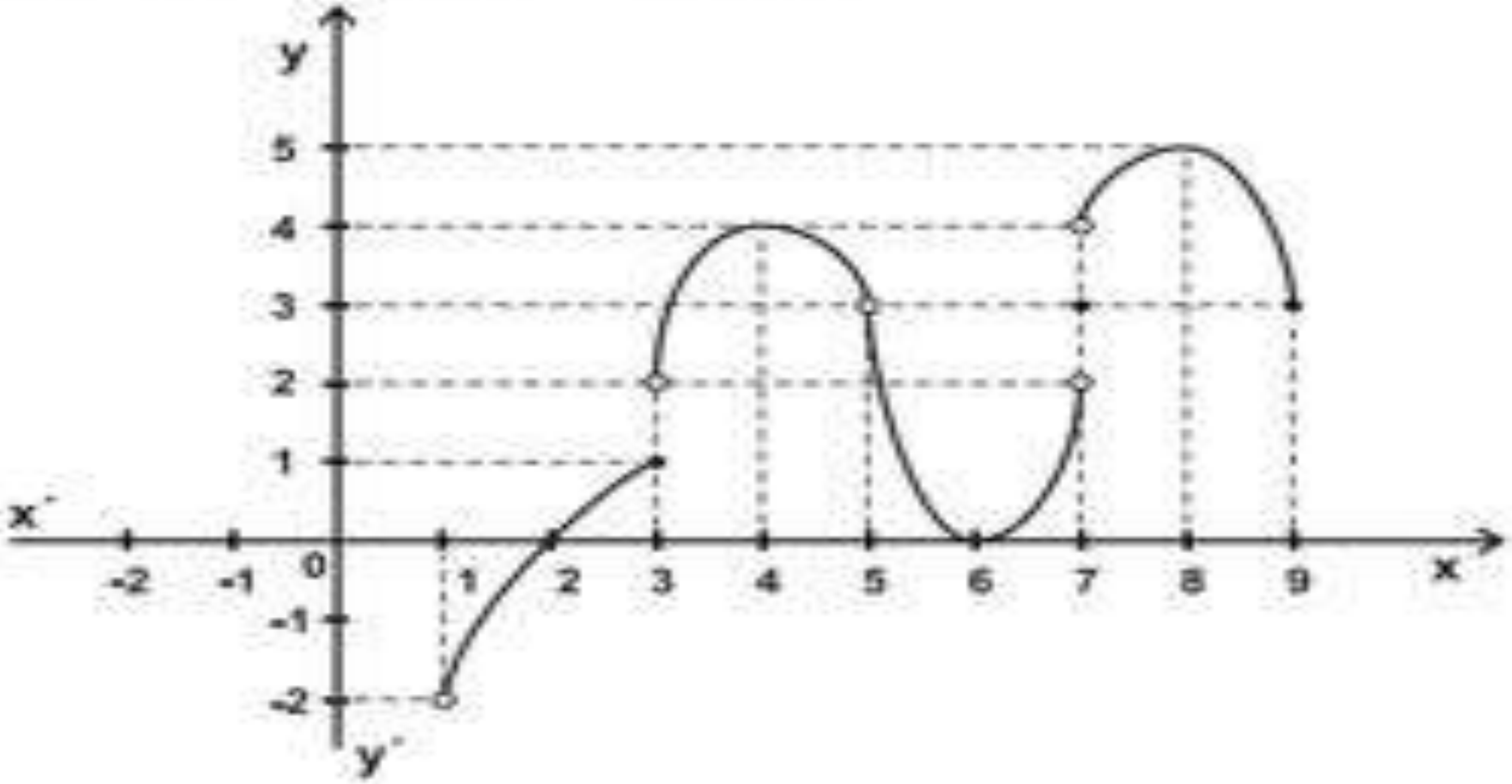
Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x \to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\nu} \ln x = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & x=1. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Μονάδες 8

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1}=-1$$

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \sim (-x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\nu}\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}}$$

$$\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\left(\frac{1}{x}\right)^{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-1}} \sim \frac{1}{-\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\nu} \ln x = 0$$

Κανόνας D’ Hospital

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x.$$

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

Μονάδες 5

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x.$$

$$\frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}=\frac{\dfrac{xe^x}{x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}e^x}=\frac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

$$\frac{e^x}{e^x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\sim}\frac{e^x}{e^x}\underset{x\to+\infty}{\to}1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}f(x)=0$$

$$x\ln x\underset{x\to0^+}{\to}0$$

$$\frac{1}{x-1}\underset{x\to0^+}{\to}-1$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\frac{a}{0}$$

$f(x) = -\eta\mu\, x,\ \ x \in [0, \pi]$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$

Μονάδες 4

$f(x) = -\eta\mu\, x, \;\; x \in [0, \pi]$

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$

Μονάδες 4

$$-\eta\mu x + x \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} \pi$$

$$-\eta\mu x - x + \pi \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} 0$$

$$-\eta\mu x - x + \pi \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} 0$$

$$\eta\mu x = \eta\mu(\pi - x) < \pi - x$$

$$0 < -\eta\mu x + \pi - x$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)+\pi}{f(x)-\pi+x} = \frac{\pi}{0^+} + \infty$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

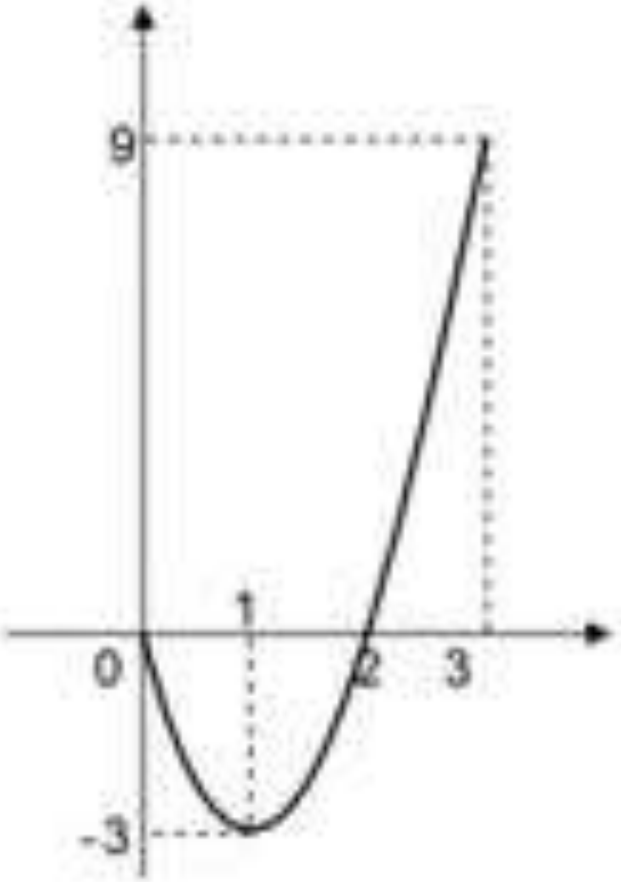
Κανόνας D’ Hospital

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:
- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$

$f(3) = 2,\ f(2) = -2$



$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$.

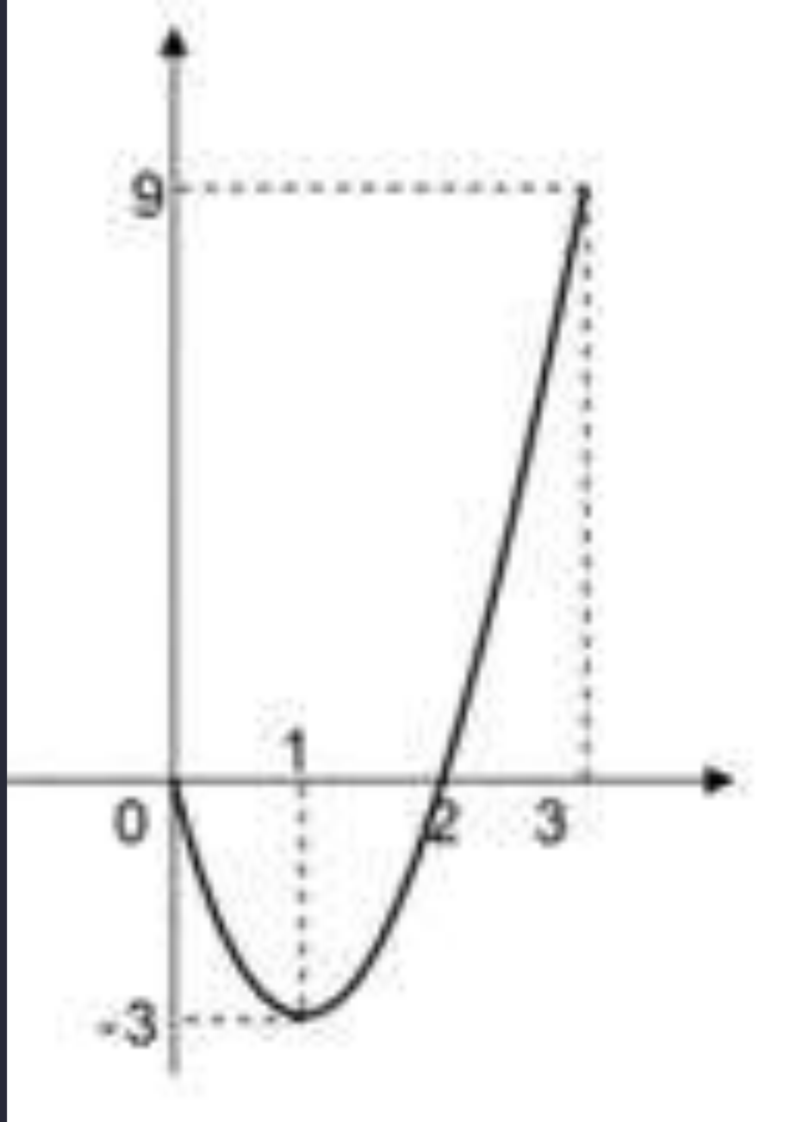
Μονάδες 5

υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

$$f(0)=2,\ f(1)=0$$

$$f(3)=2,\ f(2)=-2$$



$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\frac{f'(1)}{\frac{1}{1}}=-3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Bolzano $\Rightarrow \exists x_0(2,3),\ f(x_0)=0$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\nu} \ln x = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0, \pi] \to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\,\eta\mu x - x$.

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0}[(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{2\eta\mu x}{x}-1)=1$$

$$\lim_{x\to 0}[(f(x)-f(2x)\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(2x}{x}x\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{f(x)-f(2x)}{x}x\ln x]$$

$$=\lim_{x\to 0}[(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(2x)}{x})x\ln x]=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}x^{\nu}\ln x=0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

$$\frac{\alpha}{0}$$

ΘΕΜΑ Β

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h: A - \{2\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \dfrac{(g \circ f)(x)}{x - 2}$.

Μονάδες 6

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\frac{\sqrt{3}}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\frac{\sqrt{3}}{0^-}-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\frac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Όριο σύνθεσης

ΘΕΜΑ Α

α) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. **Μονάδες 2**

$\varphi(x) = \ell n\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ **Μονάδες 6**

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \ln x = 0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Ανισοτικές σχέσεις

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_o}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_o)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_o}\right)\right],$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$$

$$f(x)>f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\eta\mu\frac{1}{x-x_0}>-1$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}>-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\underset{x\to x_0}{\rightarrow}+\infty$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\rightarrow}+\infty$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Κριτήριο Παρεμβολής

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R}-\{3\}$.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)$.

Μονάδες 6

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)=0$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} f(x)=\frac{0}{\frac{1}{3}-1}=0$$

$$-1\leq \eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\leq 1$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

B4. Έστω η συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+2\le h(x)\le g(x)+2$, για κάθε $x\in[0,1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=2$ (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

$f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha=\beta=-1$.

$$x^2+1\le h(x)\le x+1$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1}h(x)=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{h(x)+7}-3)(\sqrt{h(x)+7}+3)}{(h(x)-2)(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(h(x)-2)}{(h(x)-2)(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

Συζυγής παράσταση

ΘΕΜΑ Α

$\lim_{x \to -\infty} e^x = -\infty$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Β4. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 9}$. **Μονάδες 6**

$f(x) = \alpha x + 1$ $\alpha = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$. **Μονάδες 5**

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **Μονάδες 7**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\sqrt{x+1}-2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{6\cdot 4}=\frac{1}{24}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Πλευρικά όρια

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \frac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

$$\lim_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(ax^2-3x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Κριτήριο Παρεμβολής

ΘΕΜΑ Α

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

$h(x)=\frac{x-1}{x}$, $x<0$.

$$f(x)=\frac{x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=\frac{-1}{0^-}+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=\frac{-1}{0^-}+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}e^{-f(x)}=\lim_{x\to -\infty}e^{x}=0$$

$$-1\le \eta\mu\frac{1}{x}\le 1$$

$$-1\cdot e^{-f(x)}\le e^{-f(x)}\eta\mu\frac{1}{x}\le 1\cdot e^{-f(x)}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Παραγοντοποίηση

Συζυγής παράσταση

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x$
και συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=-x^2+\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$. **Μονάδες 6**

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-ax}+ax)=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{1-\frac{a}{x}}+a)=+\infty(1+a)=\pm\infty,\ \alpha\nu\ a\neq-1$$

$\alpha\nu\ a=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{2}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Συζυγής παράσταση

Α4.

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$. **Μονάδες 2**

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$. **Μονάδες 2**

Β3. $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=1=f(0)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1+\sqrt{x})(1-x)}=\frac{1}{2}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Όριο ρητής συνάρτησης

Μηδενική επί φραγμένη

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3+3x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=-2(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{1-x^3}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$-1\le \eta\mu f(x)\le 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{\eta\mu f(x)}=0$$

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+1, & -1\le x\le 0\\ x^x, & 0<x\le\dfrac{2}{e}.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3+3x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x^2+3)=3$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x^3+3x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}==\lim_{x\to 0}e^x=1$$

B4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Μονάδες 6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3} = 1$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Κριτήριο Παρεμβολής

ΘΕΜΑ Α

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ημx}{x} = 1$. **Μονάδες 2**

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{συν(1+x^2)}{f(x)}$,

$f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$. **Μονάδες 6**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq 1$$

$$-\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Βοηθητική συνάρτηση

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \text{όπου } \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

$$\phi(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$$

$$f(x)=\phi(x)(x-1)+2x$$

$$\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k=\phi(x)(x-1)+2x$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right)1=\lim_{x\to 1}(\phi(x)(x-1)+2x)$$

$$\ln 1-\frac{1}{1}+k=2$$

$$k=3$$

Ευχαριστώ πολύ !

Καλή επιτυχία στις Εξετάσεις!