Σεμινάριο εμβάθυνσης στα Μαθηματικά των πανελλαδικών εξετάσεων: Κατασκευή και επίλυση θεμάτων στα οποία ζητείται η εύρεση ή απόδειξη της ύπαρξης των ριζών μιας εξίσωσης

Γιάννης Θωμαΐδης	Δημήτρης Μπαρούτης
Δρ. Μαθηματικών	Καθηγητής Μαθηματικών
τ. Σχολικός Σύμβουλος	3ο ΓΕ.Λ. Σταυρούπολης

Κείμενο εισήγησης στις Ημερίδες για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις του Παραρτήματος Μαγνησίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Τετάρτη 21 & Πέμπτη 22 Φεβρουαρίου 2024

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο σεμινάριο θα γίνει ανασκόπηση μιας αντιπροσωπευτικής κατηγορίας θεμάτων που έχουν τεθεί στις πανελλαδικές εξετάσεις Μαθηματικών τα προηγούμενα χρόνια και καλύπτουν το σύνολο σχεδόν της εξεταστέας ύλης. Συγκεκριμένα θα αναλυθούν οι τρόποι δημιουργίας, οι μέθοδοι επίλυσης και οι επιδόσεις των υποψηφίων στα θέματα που έχουν ως ζητούμενο την εύρεση ή απόδειξη της ύπαρξης των ριζών μιας εξίσωσης. Παράλληλα θα εξεταστεί με ποιο τρόπο η «μεθοδολογία» που έχει αναπτυχθεί γύρω από τη διδασκαλία αυτών των θεμάτων στην Γ΄ Λυκείου συνδέεται με τις γνώσεις για την επίλυση των εξισώσεων που έχουν αποκτήσει οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις.

Το σεμινάριο έχει διαδραστικό χαρακτήρα που διευκολύνει την ενεργό συμμετοχή των εκπαιδευτικών και μαθητών που θα το παρακολουθήσουν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων αποτελεί μία από τις πιο βασικές ενότητες της σχολικής Άλγεβρας, η διδασκαλία της οποίας αρχίζει στην Α΄ Γυμνασίου και ολοκληρώνεται τυπικά στη Β΄ Λυκείου. Αν περιοριστούμε στα σχολικά βιβλία Άλγεβρας της Α΄ και Β΄ Λυκείου, διαπιστώνουμε ότι οι αντίστοιχες γνώσεις που πρέπει να έχουν αποκτήσει οι μαθητές, πριν αρχίσουν να ασχολούνται με την ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων, περιλαμβάνουν τα εξής:

Βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

§3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

§3.2 Η Εξίσωση $x^ν = α$

§3.3 Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Βιβλίο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

§3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

§4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

§4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές,

§5.1 Εκθετική Συνάρτηση (επιλύονται και εκθετικές εξισώσεις),

§5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση (επιλύονται και λογαριθμικές εξισώσεις)

Στη σελίδα 145 διατυπώνεται το θεώρημα Bolzano για πολυωνυμικές συναρτήσεις και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ριζών με προσέγγιση.

Στις σελίδες 165 και 183 τονίζεται η χρησιμότητα των σχέσεων

$$α^{x_1} = α^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad \log_α x_1 = \log_α x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

για την επίλυση εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων.

Μερικές πιο σύνθετες ή ειδικές μορφές εξισώσεων υπάρχουν στην ενότητα «Ασκήσεις για Επανάληψη» της Α΄ Λυκείου και στις ενότητες «Γενικές Ασκήσεις» της Β΄ Λυκείου.

Οι προηγούμενες γνώσεις είναι πολύ σημαντικές για τη μελέτη των συναρτήσεων που εμφανίζονται στα στοιχεία της Ανάλυσης που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου. Στον επόμενο κατάλογο καταγράφουμε ορισμένες βασικές διαδικασίες όπου απαιτείται η επίλυση μιας εξίσωσης:

- Εύρεση του συνόλου τιμών ή της αντίστροφης μιας συνάρτησης f (διερεύνηση και επίλυση της εξίσωσης f(x) = y με άγνωστο το x και παράμετρο το y)
- Εύρεση πιθανών θέσεων ακροτάτων (ρίζες της πρώτης παραγώγου)
- Εύρεση πιθανών θέσεων σημείων καμπής (ρίζες της δεύτερης παραγώγου)

• Εύρεση των κοινών σημείων δύο γραφικών παραστάσεων

• Εύρεση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (ή γενικότερα έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης).

• Εύρεση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που είναι παράλληλη ή κάθετη σε ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης.

Πέρα όμως από τις προηγούμενες εύλογες περιπτώσεις, κάθε χρόνο εμφανίζεται στις πανελλαδικές εξετάσεις ένα τουλάχιστον ερώτημα στο οποίο ζητείται με άμεσο ή έμμεσο τρόπο η εύρεση ή η απόδειξη της ύπαρξης (ή της μη ύπαρξης) των ριζών κάποιας εξίσωσης, η οποία συνήθως συνδέεται με τη μελέτη μιας συνάρτησης.

Για να αποκτήσουμε μια εικόνα της μορφής που έχει λάβει το φαινόμενο αυτό τα τελευταία χρόνια, θα περιγράψουμε αρχικά τις εξισώσεις που τέθηκαν στις πανελλαδικές εξετάσεις των τριών τελευταίων ετών.

1. Η εμφάνιση εξισώσεων στις πανελλαδικές εξετάσεις σε ορισμένα θέματα που τέθηκαν την τριετία 2021-2023

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2021, Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \text{συν}x & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2}\end{cases},\ \text{ με }\ \alpha<-3.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3). Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τος προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \ge -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Μονάδες 7

Στο προηγούμενο θέμα ζητείται η επίλυση δύο εξισώσεων με έμμεσο τρόπο (χωρίς να χρησιμοποιείται πουθενά η λέξη «εξίσωση»). Συγκεκριμένα, στο ερώτημα Γ2(ii), αν λάβουμε υπόψη το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης f, εκείνο που ζητείται είναι η επίλυση της εξίσωσης –ημx = 0 στο διάστημα $\left(0,\ \frac{3\pi}{2}\right)$. Η απάντηση (x = π) είναι τετριμμένη για κάθε μαθητή που διαθέτει στοιχειώδεις γνώσεις Τριγωνομετρίας, και δεν έχει βέβαια παραπλανηθεί από τον τρόπο διατύπωσης του ερωτήματος. Παρατηρούμε ότι στο ερώτημα Γ2(i) ζητείται ο έλεγχος των υποθέσεων του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]$, ενώ στο Γ2(ii) η επίλυση της εξίσωσης ζητείται ως εύρεση του μοναδικού ξ στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα που μηδενίζει την παράγωγο της f. Πρόκειται για μια εμφανή απόπειρα των θεματοδοτών να παραπλανήσουν τούς υποψήφιους που αντιμετωπίζουν τα θέματα των εξετάσεων ως εφαρμογή κανόνων «μεθοδολογίας». Τα αποτελέσματα έδειξαν πράγματι ότι ο στόχος αυτός των θεματοδοτών επιτεύχθηκε.

Πολλοί υποψήφιοι, αφού έδειξαν ορθά στο Γ2(i) ότι δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, χρησιμοποίησαν λανθασμένα αυτό το αποτέλεσμα και απάντησαν ότι δεν υπάρχει η ζητούμενη ρίζα ξ της πρώτης παραγώγου στο Γ2(ii). Δηλαδή χρησιμοποίησαν τον εσφαλμένο συλλογισμό ότι «Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις μιας πρότασης, τότε δεν θα ισχύει το συμπέρασμά της».

Άλλοι υποψήφιοι προσδιόρισαν το υποδιάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ στο οποίο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αποδεικνύοντας έτσι την ύπαρξη ενός αριθμού ξ που μηδενίζει την παράγωγο της f (χωρίς βέβαια να αποδείξουν τη μοναδικότητά του και να το βρουν όπως ρητά ζητείται στην εκφώνηση). Μια παρόμοια σύγχυση μεταξύ «εύρεσης» και «ύπαρξης» εμφανίστηκε σε ορισμένα σχεδόν άριστα γραπτά, στα οποία οι υποψήφιοι μελέτησαν το σύνολο τιμών της παραγώγου f′(x) = –ημx σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ και $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ του πεδίου ορισμού της και έδειξαν ότι στο δεύτερο από αυτά ανήκει το 0. Έτσι (κάνοντας και χρήση της αντίστοιχης μονοτονίας) συμπέραναν την <u>ύπαρξη</u> (ενώ το ζητούμενο ήταν η <u>εύρεση</u>) της μοναδικής ρίζας της παραγώγου.

Το ερώτημα Γ3 στο οποίο, πίσω από μια αμιγώς γεωμετρική διατύπωση ζητείται ουσιαστικά να αποδειχθεί ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0 \text{ με } \alpha < -3$$

είναι αδύνατη, δεν μπορεί να θεωρηθεί «παραπλανητικό» όπως το προηγούμενο. Και σε αυτό όμως παρατηρήθηκε μεγάλη αδυναμία των περισσότερων υποψηφίων, είτε να «μεταφράσουν» τη ζητούμενη γεωμετρική ιδιότητα στην δευτεροβάθμια εξίσωση, είτε να αποδείξουν ότι η διακρίνουσα της τελευταίας είναι αρνητική. [1]

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2022, Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με

$x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2) Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x′x, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$ Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$ Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

Στο ερώτημα Δ1(i) ζητείται με σαφή τρόπο η απόδειξη της ύπαρξης των δύο ριζών της «μεικτής» εξίσωσης $x - \ln(3x) = 0$, η οποία δεν μπορεί να γίνει με αλγεβρικές μεθόδους και απαιτεί τη χρήση αναλυτικών εργαλείων. Πρόκειται για ένα κλασικό θέμα που μπορεί να αντιμετωπιστεί με τους εξής τρόπους: Είτε προσδιορίζοντας τα διαστήματα μονοτονίας της f και κατόπιν τα αντίστοιχα σύνολα τιμών με έλεγχο της οριακής συμπεριφοράς στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων, είτε εναλλακτικά με χρήση του θεωρήματος Bolzano στα διαστήματα $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ και [1, 2].

Τα πράγματα είναι λιγότερο σαφή στο ερώτημα Δ4, όπου ζητείται να ελεγχθεί αν μια εξίσωση έχει λύση ή όχι, ενώ ουσιαστικά πρόκειται για απόδειξη μιας ανισότητας με χρήση δύο ανισοϊσοτήτων. Εκείνης που προκύπτει από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της κυρτής συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη τη ρίζα x_2 και

[1] Περισσότερα στοιχεία για την επίδοση των υποψηφίων στο θέμα Γ/2021 υπάρχουν στο [1].

εκείνης που προκύπτει από το ολικό ελάχιστο της f στο x = 1 (το οποίο προσδιορίζεται από την προηγηθείσα μελέτη στο ερώτημα Δ1). Επειδή στις δύο αυτές ανισοϊσότητες η ισότητα ισχύει για διαφορετικές τιμές του x, προκύπτει τελικά η ανισότητα $2f(x) > f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$, από την οποία έπεται αμέσως ότι η εξίσωση του ερωτήματος Δ4 είναι αδύνατη.

Η «μετάλλαξη» της ανισότητας σε «αδύνατη εξίσωση» εξυπηρετούσε αποκλειστικά εξεταστικές σκοπιμότητες και αυτό επιβεβαιώθηκε από τον πολύ μικρό αριθμό των υποψηφίων που έδωσαν την προηγούμενη απόδειξη. Αντίθετα πολλοί προσπάθησαν να αποδείξουν ότι η εξίσωση είναι αδύνατη με απαγωγή σε άτοπο και αλλεπάλληλες εφαρμογές του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διάφορα υποδιαστήματα του $(0, +\infty)$ που δημιουργούνται από τους αριθμούς $x_1 < 1 < x_2$. Ακολουθώντας προφανώς αντίστοιχους «μεθοδολογικούς κανόνες» που είχαν διδαχθεί στο στάδιο της προετοιμασίας τους, οι περισσότεροι από αυτούς κατέληξαν σε αδιέξοδο αλλά είναι εντυπωσιακό είναι ότι ορισμένοι κατόρθωσαν να ολοκληρώσουν τη διαδικασία γεμίζοντας πολλές σελίδες. [2]

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2023, Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, 2) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln(2 - x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = l \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$. Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2) Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0, 1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$ Μονάδες 6

[2] Μια παρόμοιας μορφής, αλλά όχι αδύνατη εξίσωση είχε τεθεί στο θέμα Δ των πανελλαδικών εξετάσεων του 2017, με ζητούμενο την επίλυσή της. Παρατηρήθηκαν και τότε αντίστοιχα φαινόμενα, τα οποία έχουμε περιγράψει στο [1].

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0, 2) με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$ (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $x_1F(x) + x_2G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (x_1, x_2) (μονάδες 5) Μονάδες 9

Στο θέμα αυτό παρατηρούμε ότι ζητείται με άμεσο ή έμμεσο τρόπο η επίλυση τριών εξισώσεων.

Στο ερώτημα Δ2, ζητείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που έγινε στο ερώτημα Δ1(i)) του 2022, η απόδειξη της <u>ύπαρξης</u> των δύο ριζών της «μεικτής» εξίσωσης

$$\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3=0 \text{ στο διάστημα } (0,\,2)$$

(η μόνη ουσιαστική διαφορά είναι ότι τώρα πρόκειται για συνάρτηση κοίλη)

Το γεωμετρικό ζητούμενο του ερωτήματος Δ3 ανάγεται στην απόδειξη <u>ύπαρξης</u> της μοναδικής ρίζας της εξίσωσης

$$f'(x)=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1} \qquad (1)$$

στο διάστημα (0, 1), η οποία μπορεί να γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $\left[x_1,\ \frac{1}{3}\right]$ και έλεγχο της μονοτονίας της πρώτης παραγώγου. Ένας άλλος τρόπος είναι να αποδειχθεί πρώτα ότι το σύνολο τιμών της πρώτης παραγώγου, όταν $x \in (0, 1)$, είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ και στη συνέχεια ότι ο αριθμός στο δεύτερο μέλος της (1) είναι θετικός.

Τέλος, στο ερώτημα Δ4(ii) ζητείται επίσης η απόδειξη <u>ύπαρξης</u> της μοναδικής ρίζας μιας εξεζητημένης εξίσωσης στο διάστημα (x_1, x_2), την οποία οι θεματοδότες δημιούργησαν χρησιμοποιώντας δύο αρχικές της συνάρτησης f στο διάστημα (0, 2) και τις ρίζες της που εντοπίστηκαν στο ερώτημα Δ2. Η απόδειξη εδώ μπορεί να γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στη βοηθητική συνάρτηση

$$h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2,\ x \in (0, 2),$$

αξιοποιώντας ιδιότητες των αρχικών συναρτήσεων F και G που συνάγονται από τα προηγούμενα ερωτήματα.

Όπως αναφέρεται στο [2], η αξιολόγηση 2700 γραπτών στο $53^{ο}$ και $66^{ο}$ Βαθμολογικό Κέντρο Δυτικής Θεσσαλονίκης έδειξε ότι τα ποσοστά των υποψηφίων που έλαβαν το σύνολο των μονάδων στα τρία προηγούμενα ερωτήματα ήταν 14,22%, 7,07% και 2,67% αντίστοιχα.

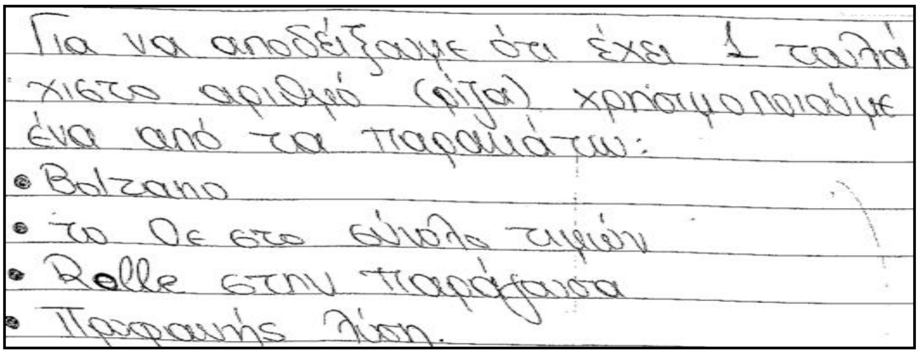
2. Η ανάπτυξη μιας «μεθοδολογίας» για την αντιμετώπιση των εξισώσεων στις πανελλαδικές εξετάσεις

Η συχνή εμφάνιση τις πανελλαδικές εξετάσεις θεμάτων, όπως αυτά που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, ήταν επόμενο να προκαλέσει μια υπερπαραγωγή αντίστοιχων ασκήσεων στη σχετική βιβλιογραφία, καθώς την ανάπτυξη μιας εκτεταμένης «μεθοδολογίας». Σε ένα βιβλίο που κυκλοφόρησε σχετικά πρόσφατα, η μεθοδολογία αυτή παρουσιάζεται στην ακόλουθη μορφή ([3], σ.272-273):

ΑΝΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ:	
Ρίζες	
ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ	**ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ:**
Η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(α, β)$	Θ. Bolzano ή Θ. Rolle για την F με $F'(x) = f(x)$, $x \in [α, β]$
Η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(α, β)$	f γνησίως μονότονη στο $(α, β)$ ή άτοπος απαγωγή με Θ. Rolle
Η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(α, β)$	Συνδυασμός των δύο προηγουμένων
Η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον ν ρίζες στο $(α, β)$	Χωρίζουμε το $[α, β]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα πλάτους και αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση
Η $f(x) = 0$ έχει το πολύ ν ρίζες στο $(α, β)$	Άτοπος απαγωγή και Θ. Rolle
Η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς ν ρίζες στο $(α, β)$	Συνδυασμός τέταρτης και πέμπτης περίπτωσης
Ποιο είναι το πρόσημο και το πλήθος των ριζών της $f(x) = 0$;	Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f, κάνοντας τον πίνακα μεταβολής της και αναγόμαστε στην τρίτη περίπτωση
Λύστε την $f(x) = 0$ στο Α	Βρίσκουμε τις προφανείς ρίζες της f και αποδεικνύουμε ότι δεν έχει άλλες

Εκείνο που κάνει εντύπωση είναι ότι μόνο η τελευταία περίπτωση αναφέρεται στην εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης, δηλαδή αυτό που οι μαθητές έκαναν όλα τα προηγούμενα χρόνια στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Και μάλιστα γίνεται λόγος μόνο για «προφανείς ρίζες» και απόδειξη ότι δεν υπάρχουν άλλες. Ο συγγραφέας εύλογα θεωρεί δεδομένο ότι σε κάθε άλλη περίπτωση (π.χ. μιας διτετράγωνης εξίσωσης), ο μαθητής της Γ΄ Λυκείου διαθέτει τις γνώσεις για να τις αντιμετωπίσει.[3]

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι η θεματολογία των πανελλαδικών εξετάσεων έχει δημιουργήσει μια «παράλληλη ύλη» γύρω από τις εξισώσεις, η οποία στηρίζεται κυρίως στα υπαρξιακά θεωρήματα της Ανάλυσης. Το ζήτημα που τίθεται αφορά την επίδραση αυτής της «ύλης» στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών για την επίλυση των εξισώσεων, και ιδιαίτερα αν ο τρόπος διδασκαλίας στην Γ΄ Λυκείου ευνοεί την ομαλή συνύπαρξή τους. Πριν αναφέρουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα που σχετίζονται με το συγκεκριμένο ζήτημα, θα παραθέσουμε μια φωτογραφία από γραπτό των πανελλαδικών εξετάσεων, που είναι αρκετά διαφωτιστική για τον τρόπο με τον οποίο προσλαμβάνουν τη συγκεκριμένη «ύλη» πολλοί μαθητές:


Για να αποδείξουμε ότι έχει 1 τουλάχιστο αριθμό (ρίζα) χρησιμοποιούμε ένα από τα παρακάτω:
- Bolzano
- το 0∈ στο σύνολο τιμών
- Rolle στην παράγουσα
- Προφανής λύση.

Τα προηγούμενα γράφτηκαν από έναν υποψήφιο πριν ασχοληθεί με το ερώτημα Γ2(ii) στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2021 που ζητούσε, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, την εύρεση της μοναδικής ρίζας της τριγωνομετρικής εξίσωσης –ημx = 0 διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$. Ο υποψήφιος, αντί για την εύρεση της ρίζας x = π με αξιοποίηση βασικών γνώσεων της Β΄ Λυκείου, χρησιμοποίησε το θεώρημα Rolle για να αποδείξει την ύπαρξή της και βρέθηκε εκτός θέματος. Η αναγραφή ενός πλήθους περιπτώσεων της σχετικής «μεθοδολογίας» πριν αρχίσει να ασχολείται με το ερώτημα, δείχνει αρχικά την ανασφάλεια του συγκεκριμένου υποψήφιου. Το αποτέλεσμα δείχνει επίσης την αδυναμία να εξισορροπήσει τη νέα «ύλη» με τις προηγούμενες γνώσεις του για την επίλυση των εξισώσεων. Ένα άλλο σημαντικό

[3] Τις προηγούμενες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί μια εκτεταμένη συγγραφική δραστηριότητα για τη συγκεκριμένη «ύλη» και την αντίστοιχη «μεθοδολογία», από την οποία παραθέτουμε στη βιβλιογραφία ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα (βλ. τα [4], [5], [6] και [7]).

ζήτημα είναι αν οι υποψήφιοι γενικά είναι σε θέση να επιλέξουν τον κατάλληλο «μεθοδολογικό κανόνα» σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση.

Η χρήση από μεγάλο αριθμό υποψηφίων εξεζητημένης «μεθοδολογίας», ακόμη και σε περιπτώσεις που είναι εντελώς περιττή ή αναφάρμοστη, παρατηρείται κάθε χρόνο στα βαθμολογικά κέντρα των πανελλαδικών εξετάσεων. Αυτή η πορεία, ακόμη και όταν δεν οδηγεί σε αδιέξοδο, προκαλεί απώλεια πολύτιμου χρόνου που είναι καταστροφική μέσα στις ασφυκτικές συνθήκες των πανελλαδικών εξετάσεων. Στην ενότητα 1 αναφέραμε ορισμένα παραδείγματα τέτοιας συμπεριφοράς στην αντιμετώπιση εξισώσεων που τέθηκαν στις εξετάσεις τα τρία τελευταία χρόνια. Στη επόμενη ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα ακόμη από εξετάσεις προηγουμένων ετών.

3. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα θεμάτων στα οποία ζητείται με άμεσο ή έμμεσο τρόπο η μελέτη των ριζών μιας εξίσωσης

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2015, Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. [Μονάδες 6]

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα. [Μονάδες 8]

Τα ερωτήματα Γ1 και Γ2 (στο θέμα αυτό υπήρχαν δύο ακόμη ερωτήματα) συνιστούν την κλασική μορφή ενός θέματος των πανελλαδικών εξετάσεων στο οποίο ζητείται η διερεύνηση των ριζών μιας εξίσωσης. Το Γ1 «προετοιμάζει» τα απαραίτητα δεδομένα (μονοτονία, ιδιότητα 1–1 και σύνολο τιμών της συνάρτησης f) με τα οποία θα γίνει δυνατή στο Γ2 η απόδειξη της ύπαρξης μοναδικής ρίζας μιας εξίσωσης που κατασκευάζεται με βάση τη συνάρτηση f. Προφανώς δεν χρειάζεται να σχολιάσουμε ότι η συγκεκριμένη εξίσωση εξυπηρετεί αποκλειστικά τις εξεταστικές σκοπιμότητες και δεν έχει κανόνα νόημα έξω από αυτές. Ούτε επίσης ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών στην Γ΄ Λυκείου δίνει προτεραιότητα σε θέματα αυτού του είδους και παρόμοια έχουν διδαχθεί όλοι οι μαθητές.

Στις ενδεικτικές απαντήσεις που στέλνει η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων προς τα βαθμολογικά κέντρα, προτάθηκε για το ερώτημα Γ2 η ακόλουθη συνοπτική λύση:

Είναι

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2)\overset{f\uparrow}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}\in f(A)$$

Από θ. ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$: $f(\xi)=\frac{e^2}{2}$ και το ξ μοναδικό (f γνήσια μονότονη). [4]

Η αξιοποίηση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης που έχει την ιδιότητα 1–1 αποτελεί μία από τις κλασικές μεθόδους για την απόδειξη της ύπαρξης ρίζας μιας εξίσωσης με τα εργαλεία της Ανάλυσης. Παρά το γεγονός ότι τα προηγούμενα ανήκουν στον πυρήνα της σχετικής «μεθοδολογίας», υπήρξαν γραπτά στα οποία η αντιμετώπιση του ερωτήματος Γ2 έγινε με επιλογή μιας διαφορετικής και εξαιρετικά χρονοβόρας μεθόδου. Το επόμενο αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από γραπτό που συγκέντρωσε υψηλή βαθμολογία:

Ο υποψήφιος εισάγει τη βοηθητική συνάρτηση $h(x)=e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)$ και η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$ γίνεται $f\left(h(x)\right)=\frac{e^2}{5}$.

Στη συνέχεια εισάγει τη νέα βοηθητική συνάρτηση

$$k(x)=f\left(h(x)\right)=\frac{e^{h(x)}}{h^2(x)+1}=\frac{e^{e^{3-x}\cdot(x+1)}}{\left[e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right]^2+1}$$

Βρίσκει με πλήρη μελέτη ότι αυτή η σύνθετη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$.

Επειδή $\frac{e^2}{5}\simeq 1,478\in\left(1,+\infty\right)$ η εξίσωση θα έχει ακριβώς μία λύση.

[4] Πρέπει να τονιστεί ότι η χρήση του συνόλου τιμών f(A) στο τελευταίο βήμα των μετασχηματισμών της αρχικής εξίσωσης, καθιστά περιττή την αναφορά στο θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Πρόκειται ουσιαστικά για μία άσκοπη επανάληψη του ορισμού του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης που υπάρχει στη σελίδα 15 του σχολικού βιβλίου. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η διατύπωση του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο σχολικό βιβλίο (σ.76) αναφέρεται σε συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε κλειστό διάστημα.

Όπως είναι φανερό ο συγκεκριμένος υποψήφιος εφαρμόζει την ίδια μέθοδο με εκείνη της Κ.Ε.Ε., έχοντας όμως μεγάλη εξάρτηση από μια άλλη μέθοδο, την εισαγωγή βοηθητικών συναρτήσεων («θέτω h(x) = …»). Αγνοεί ουσιαστικά τα αποτελέσματα του ερωτήματος Γ1 για τη συνάρτηση f και τα αποδεικνύει εκ νέου για τη σύνθετη συνάρτηση k(x) = f(h(x). Έτσι η ζητούμενη απόδειξη στο Γ2 γίνεται πολύπλοκη και χρονοβόρα, και είναι αξιοθαύμαστο ότι είχε την ικανότητα να τη φέρει σε πέρας.

Η περίπτωση αυτή εγείρει ένα ενδιαφέρον ερώτημα: Τι είδους μαθηματική ικανότητα και κρίση δηλώνει η προηγούμενη λύση;

Ο συγκεκριμένος υποψήφιος διαθέτει προφανώς μεγάλη τεχνική ικανότητα στην εκτέλεση «συνταγών» και πράξεων, αλλά αναδύονται πολλά ερωτηματικά αν διαθέτει κριτική ικανότητα ορθών επιλογών και αποφάσεων (η οποία παίζει κρίσιμο ρόλο στις μετέπειτα σπουδές και την επαγγελματική σταδιοδρομία).

Το επόμενο παράδειγμα φέρνει στην επιφάνεια το άλλο πρόβλημα που έχουμε ήδη επισημάνει, την κυριαρχία της «μεθοδολογίας» έναντι των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών.

Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2002, Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση .[5]

[Μονάδες 10]

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

[Μονάδες 5]

Στο θέμα αυτό ζητείται (έμμεσα) η επίλυση μιας παραμετρικής εκθετικής εξίσωσης και (άμεσα) η απόδειξη ότι μια λογαριθμική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. Είναι χαρακτηριστικό ότι όλα τα ζητούμενα μπορούν να αποδειχθούν με βασικές γνώσεις της Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι η δοθείσα συνάρτηση f είναι 1–1 με δύο τρόπους.

i) Με χρήση του ορισμού:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow\ \dots\ \Rightarrow x_1=x_2$$

[5] Το ερώτημα (α) είναι η άσκηση 2(vii) Α΄ Ομάδας της §1.3 του σχολικού βιβλίου

ii) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, αφού πρώτα μετασχηματίσουμε τον τύπος της ως εξής:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$$

Άρα: $$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}+1<e^{x_2}+1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}+1}>\frac{1}{e^{x_2}+1} \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{e^{x_1}+1}<-\frac{2}{e^{x_2}+1} \Rightarrow 1-\frac{2}{e^{x_1}+1}<1-\frac{2}{e^{x_2}+1} \Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης απαιτείται η επίλυση της παραμετρικής εξίσωσης

$$f(x) = y \text{ με } x,\ y\in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x-1=ye^x+y \Leftrightarrow (1-y)e^x=1+y \quad (2)$$

Αν y = 1, η εξίσωση (2) $\Leftrightarrow 0\cdot e^x = 2$ (αδύνατη)

Αν $y \neq 1$, η εξίσωση (2) $\Leftrightarrow$ $$e^x=\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\dfrac{1+y}{1-y} \\ \dfrac{1+y}{1-y}>0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$\frac{1+y}{1-y}>0 \Leftrightarrow (1+y)(1-y)>0 \Leftrightarrow 1-y^2>0 \Leftrightarrow y^2<1 \Leftrightarrow -1<y<1$$

Το διάστημα (–1, 1) είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Άρα σύμφωνα με την (3), η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η

$$f^{-1}: (-1,\ 1) \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Η απάντηση στο ερώτημα (β) ανάγεται στην επίλυση μιας λογαριθμικής εξίσωσης:

$$f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\dfrac{1+x}{1-x}=0 \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln 1 \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x}=1 \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=1-x \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -1<x<1 \end{cases}$$

Η προηγούμενη λύση εξασφαλίζει επίσης, χωρίς καμιά άλλη επεξήγηση, ότι το x = 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x) = 0$.

Φαίνεται όμως ότι αυτό το γεγονός δεν θεωρείται επαρκής λόγος από πολλούς μαθητές. Όταν το προηγούμενο θέμα τέθηκε σε ένα ενδοσχολικό επαναληπτικό διαγώνισμα, κανείς δεν χρησιμοποίησε τις γνώσεις της Β΄ Λυκείου για να λύσει τη λογαριθμική εξίσωση. Γνωρίζοντας από την εκφώνηση τη ρίζα $x = 0$, οι περισσότεροι έγραψαν ότι είναι προφανής (ή έκαναν επαλήθευση με αντικατάσταση) και στη συνέχεια απέδειξαν τη μοναδικότητα με απαγωγή σε άτοπο χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle:

Έστω ότι έχει και δεύτερη ρίζα $\rho \in (-1, 1)$ με $\rho \neq 0$.

Τότε ισχύει $f^{-1}(0) = f^{-1}(\rho) = 0$ και επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, \rho]$, θα υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Rolle ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \rho)$ τέτοιο ώστε $\left(f^{-1}\right)'(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή ισχύει

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \ . \ . \ . \ = \frac{2}{1-x^2} \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (-1, 1)$$

Αυτή η απάντηση είναι προφανώς σωστή αλλά την αναφέρουμε επειδή δείχνει την αρνητική επίδραση της «μεθοδολογίας» που διδάσκεται στην Γ΄ Λυκείου στις μαθηματικές γνώσεις που έχουν αποκτηθεί στις προηγούμενες τάξεις. Οι καταστροφικές συνέπειες αυτής της κατάστασης φαίνονται ιδιαίτερα όταν η «μεθοδολογία» εφαρμόζεται στο θέμα Β των πανελλαδικών εξετάσεων, με το οποίο τα τελευταία χρόνια αξιολογούνται οι πολύ βασικές γνώσεις της Ανάλυσης που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου. Το επόμενο παράδειγμα είναι αρκετά διαφωτιστικό:

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016, Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. [Μονάδες 6]

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. [Μονάδες 9]

Στα προηγούμενα ερωτήματα (όπως και στα άλλα δύο) αυτού του θέματος, δεν υπάρχει καμία αναφορά στην επίλυση ή τη μελέτη των ριζών κάποιας εξίσωσης. Αυτό το ζήτημα όμως εμφανίζεται αναγκαστικά, επειδή για να δοθούν οι ζητούμενες απαντήσεις απαιτείται η γνώση των ριζών της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Οι υποψήφιοι δεν είχαν κανένα πρόβλημα εφαρμογής των κανόνων παραγώγισης για την εύρεση των παραγώγων που γίνεται ως εξής:

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2+1\right) - x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad (1)$$

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)^2 - 8x^2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} \qquad (2)$$

Στην περίπτωση της δεύτερης παραγώγου εμφανίστηκαν δύο διαφορετικές τάσεις. Ένας μικρός μόνο αριθμός υποψηφίων είχε τη δυνατότητα να εκτελέσει με επιτυχία τη διαδικασία της αλγεβρικής απλοποίησης στο δεύτερο μέλος της (2), και να προσδιορίσει τη δεύτερη παράγωγο στη μορφή

$$f''(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\left(2-6x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3} \qquad (3)$$

Οι περισσότεροι συνέχισαν απτόητοι τις πράξεις στον αριθμητική και έφτασαν στην

$$f''(x) = \frac{2x^4+4x^2+2-8x^4-8x^2}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-6x^4-4x^2+2}{\left(x^2+1\right)^4} \qquad (4)$$

Έτσι λοιπόν η ζητούμενη μελέτη της συνάρτησης εξαρτάται από την ικανότητα των υποψηφίων να προσδιορίσουν τις ρίζες και το πρόσημο της (1) για την πρώτη παράγωγο και της (3) ή (4) για τη δεύτερη παράγωγο.

Η πλειοψηφία των υποψηφίων δεν είχε καμιά δυσκολία να προσδιορίσει τη ρίζα και το πρόσημο της πρώτης παραγώγου από την (1) αν και σε ορισμένα γραπτά χρησιμοποιήθηκαν «μέθοδοι» του είδους:

«Έχει προφανή ρίζα το 0. Έστω ότι έχει και άλλη ρίζα ρ …»

Αυτό είχε ως συνέπεια την εμπλοκή σε μια αδιέξοδη προσπάθεια να αποδειχθεί, με απαγωγή σε άτοπο, ότι η ρητή εξίσωση $\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$ έχει μοναδική ρίζα το x = 0 (!!).

Αντίθετα, η πλειοψηφία συνάντησε μεγάλη δυσκολία με τον εντοπισμό των ριζών και του προσήμου της δεύτερης παραγώγου από την (3) ή την (4). Τα επόμενα παραδείγματα των «μεθόδων» που χρησιμοποιήθηκαν είναι χαρακτηριστικά:

Μια μεγάλη κατηγορία υποψηφίων έδειξε πλήρη άγνοια στοιχειώδους αλγεβρικού λογισμού, συγχέοντας την επίλυση των ανισώσεων 2ου βαθμού με την επίλυση των αντίστοιχων εξισώσεων:

$$2-6x^2=0 \Leftrightarrow 6x^2=2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$2-6x^2>0 \Leftrightarrow 6x^2<2 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow x<\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Μια άλλη μεγάλη κατηγορία κατέφυγε στην εισαγωγή βοηθητικών συναρτήσεων:

«Θέτω $h(x) = 2 – 6x^2$ ή $h(x) = –6x^4 – 4x^2 + 2$ …»

Ειδικά στη δεύτερη περίπτωση, πολλοί υποψήφιοι πραγματοποίησαν πλήρη μελέτη της βοηθητικής συνάρτησης h με χρήση παραγώγων, κατασκεύασαν πίνακα μεταβολών, προσδιόρισαν ακόμη και το σύνολο τιμών $(–\infty, 2]$. Επίσης απέδειξαν με χρήση του θεωρήματος Bolzano την ύπαρξη δύο πραγματικών ριζών $\rho_1 \in (–\infty, 0)$ και $\rho_2 \in (0, +\infty)$ της h, οι οποίες είναι θέσεις σημείων καμπής. Δεν ήταν όμως σε θέση να προσδιορίσουν αυτές τις θέσεις επακριβώς με επίλυση της διτετράγωνης εξίσωσης!

Επειδή το έτος 2016 έγιναν οι πρώτες πανελλαδικές εξετάσεις με το σύστημα των Ομάδων Προσανατολισμού, ο Εθνικός Οργανισμός Εξετάσεων πραγματοποίησε για πρώτη φορά μια στατιστική μελέτη των επιδόσεων των όλων υποψηφίων. Από τους 40390 υποψήφιους που εξετάστηκαν το 2016 στα Μαθηματικά στο ερώτημα Β1 έλαβαν το σύνολο των 6 μονάδων λίγο περισσότεροι από τους μισούς, ενώ στο ερώτημα Β2 έλαβαν το σύνολο των 9 μονάδων περίπου ένας στους πέντε (βλ. [8], σ.148). Αν λάβουμε υπόψη ότι με τα συγκεκριμένα ερωτήματα εξετάζονται οι πλέον βασικές γνώσεις των στοιχείων του Διαφορικού Λογισμού που διδάσκονται οι μαθητές στην Γ΄ Λυκείου, καθώς και ότι τα ίδια, χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στο θέμα Β καταγράφονται μέχρι σήμερα, είναι φανερό ότι υφίσταται ένα μείζον πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Το πρόβλημα εμφανίζεται με έντονο τρόπο στις πανελλαδικές εξετάσεις λόγω της σχολαστικής διαδικασίας αξιολόγησης των γραπτών, αλλά είναι προφανές ότι διατρέχει ολόκληρο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

[1] Γ. Θωμαΐδης & Δ. Μπαρούτης. *Οι επιδόσεις των υποψηφίων σε «πρωτότυπα» ή «παραπλανητικά» ερωτήματα των πανελλαδικών εξετάσεων*. Εισήγηση στις Ημερίδες για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις του Παραρτήματος Έβρου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Αλεξανδρούπολη & Ορεστιάδα, 11 & 12–3–2023).

[2] Μ. Ασκητά, Ν. Μανάρας, Δ. Μπαρούτης, Π. Τσαμπούκα, Π. Χαλαζιάν, Ν. Χατζημανώλης & Γ. Χριστοδουλίδης. *Στατιστική Έρευνα και Μελέτη Αποτελεσμάτων των Γραπτών των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών και Οικονομικών Σπουδών 53ου – 66ου Βαθμολογικών Κέντρων*. Θεσσαλονίκη, 2023.

[3] Γ. Τσαπακίδης. *Αναλύοντας την Ανάλυση*. Εκδόσεις Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2017.

[4] Χ. Λαζαρίδης. Εξισώσεις και ανισώσεις με τη βοήθεια της Ανάλυσης. *Ευκλείδης Β΄* 18, σσ.44–48 (1995).

[5] Θ. Ξένος. Μελέτη ύπαρξης ριζών με τη βοήθεια της Ανάλυσης. *Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί* 1, σσ.13–16 (1996).

[6] Μ. Στεργίου. Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου. Εξισώσεις (Μέθοδοι – Σχόλια – Εφαρμογές). *Εκθέτης – Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας* 14 (2014). Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://ekthetis.gr/archive.html

[7] Μ. Παπαγρηγοράκης. Επίλυση εξισώσεων με αξιοποίηση «εργαλείων» της ανάλυσης. Μέθοδοι – λυμένα παραδείγματα. *Έκκεντρον* 1, σσ,2–37 (2017). Διαθέσιμο στον ιστότοπο:
http://users.sch.gr/mipapagr/index.php/en/188-ekkentron/487-1

[8] Ν. Κιμουλάκης. *Αποτύπωση και ανάλυση της κατανομής βαθμολογίας των θεμάτων των πανελλαδικά εξεταζόμενων μαθημάτων στις εξετάσεις πρόσβασης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση «Πανελλαδικές Εξετάσεις – Νέο Σύστημα 2016»*. Τόμος Ι: Ημερήσια Γενικά Λύκεια. Αθήνα: Εθνικός Οργανισμός Εξετάσεων, 2017.
Διαθέσιμο στον ιστότοπο: https://eoe.minedu.gov.gr/index.php/meletes-e-o-e

[9] Γ. Θωμαΐδης & Δ. Μπαρούτης. *Τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων και οι επιδόσεις των υποψηφίων: Ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών* [υπό έκδοση].